

## Beispiele

1) Das inverse Streuproblem der Akustik

$$\Delta u_\Theta + k^2 u_\Theta = q u_\Theta \quad \text{im } \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

 $q$  Funktion,  $q = 0$  außerhalb  $\Omega$ 
 $k$  reelle Konstante,  $\Theta \in \mathbb{R}^3$  Einheitsvektor

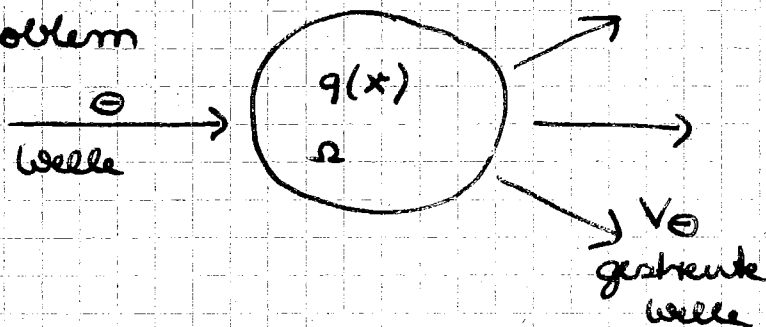
$$u_\Theta(x) = e^{ik\Theta \cdot x} + v_\Theta(x)$$

$$\frac{\partial v_\Theta}{\partial r}(x) + ik v_\Theta(x) \rightarrow 0, \quad |x| = r \rightarrow \infty$$

Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

Direktes Problem:  $q$  bekannt, suche  $v_\Theta$ :

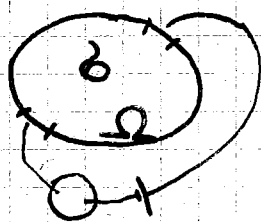
akustisches Streuproblem



Inverses Problem:

 $v_\Theta$  bekannt für alle  $\Theta$ , suche  $q$ !

2) Impedanz-Tomographie

 $b(x)$  Leitfähigkeit im Punkt  $x \in \Omega$ .Elektrisches Potential  $u$ :

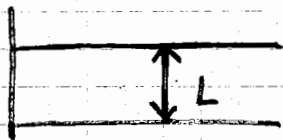
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(b \cdot \nabla u) &= \sigma \quad \text{in } \Omega \\ j &= b \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial \Omega \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

Direktes Problem: Geg.  $j$ ,  $b$ , - suche  $u$ !Inverses Problem: Für jedes  $j$  sei bekannt

- $\Lambda_b j$ :  
 i) Löse  $\textcircled{1}$  für  $j$   
 ii) Setze  $\Lambda_b j = u|_{\partial \Omega}$

Bestimme  $\delta$  aus  $\Lambda_6$

3) Inverse Probleme bei chemischen Reaktionen



2 Substanzen mit  
Konzentrationen

$$u(x, t), \quad v(x, t)$$

Reaktion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kuv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - kuv \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L \\ t \geq 0 \end{array}$$

$D$  Diffusionskonstante  
 $k$  Reaktionsgeschwindigkeit

$$u(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 1$$

Direktes Problem:

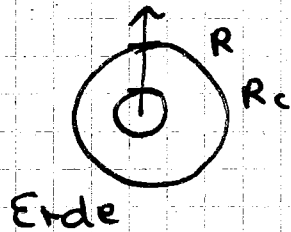
$D, k$  gegeben, suche  $u, v$

Inverses Problem:

z. B.  $R(t) = \int_0^L u(x, t) dx$  bekannt,

gesucht sind  $D$  und  $k$

4) Inverses Eigenwertproblem der Seismologie



Im Erdmantel sei die Dichte  $\rho(r)$ , Steifigkeit (rigidity)  $\mu(r)$

Differentialgleichung der Eigenschwingungen:

$$-(r^4 \mu u')' + \frac{(l+2)(l-1)}{r^2} r^4 \mu u$$

$$= \lambda r^4 \rho u \text{ in } R_c \leq r \leq R$$

$$u(R_c) = u(R) = 0$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Eigenwerte } \lambda_{lj} \quad j = 0, 1, 2$$

Direktes Problem:

$\mu, \rho$  bekannt

Bestimme  $\lambda_{lj}$ !

Inverses Problem:

$\lambda_{lj}$  bekannt, Bestimme  $\rho$  und  $\mu$

$$\sqrt{\lambda_{lj}} / 2\pi$$

sind die

Frequenzen der Eigenschwingung.

5) Das inverse Streuproblem der Quantenmechanik

$$-\Delta \psi + V \cdot \psi = E \cdot \psi$$

$$V = V(x)$$

$$\psi_0(R, x) = e^{ik \cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \mathcal{F}(R, \frac{x}{|x|}, \theta) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

$\uparrow$

$$|x| \rightarrow \infty$$

Eine solche Lsg gibt es.

$\theta$  Einheitsvektor ~~in  $\mathbb{R}^3$~~   $\mathbb{R}^2 = E$

$\mathcal{F}$  heißt das Fernfeld.

Direktes Problem:

Geg.  $V$ , ges.  $A!$

Inverses Problem:

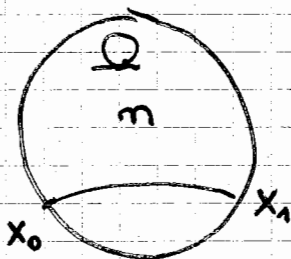
Geg.  $A = A(R, \omega, \Theta)$  für  $\omega, \Theta$  bel., ges.  $V$

Exkursion:

13.5 Mi Paderborn, Siemens Nixdorf

6)

Das inverse kinematische Problem



$m$  Brechungsindex

Man mißt

$T(x_0, x_1)$  Laufzeit des Signals von  $x_0$  nach  $x_1$

Inverses Problem:

$T(x_0, x_1)$  bekannt für alle  $x_0, x_1 \in \Omega$ ,  
gesucht:  $m!$

Signale laufen entlang der geodätischen  
bzw. der Metriks  $ds = m \sqrt{\sum_{i=1}^n (dx_i)^2}$

d.R.  $x = x(t)$

$$\ddot{x} = \frac{m'}{m^3} \frac{x}{|x|} - \frac{2m'}{m} \frac{x \cdot \dot{x}}{|x|^3} \cdot \dot{x}, \quad m' = \nabla m \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$T(x_0, x_1) = \int \sqrt{\sum_{i=1}^n (dx_i)^2}$$

$$\Gamma_n(x_0, x_1)$$

$\Gamma_n(x_0, x_1)$  die Geodätische von  $x_0$  nach  $x_1$

Geodätische  
Lsg der  
Aufgabe

## Geschichte inverser Probleme:

deglotz + Weierstrass (1905 - 1907):

Inverses kinematisches Problem der Erde

Borg (1946) Inverses Eigenwertproblem

Ab 1950:

Gelfand, Lewitan, Marchenko:

Quantenmechanik

Ab 1970:

Intensive weltweite Beschäftigung mit inversen  
Problemen

zur Vorlesung

Teil I: Diskrete inverse Probleme

II: Gelfand-Lewitan-Theorie

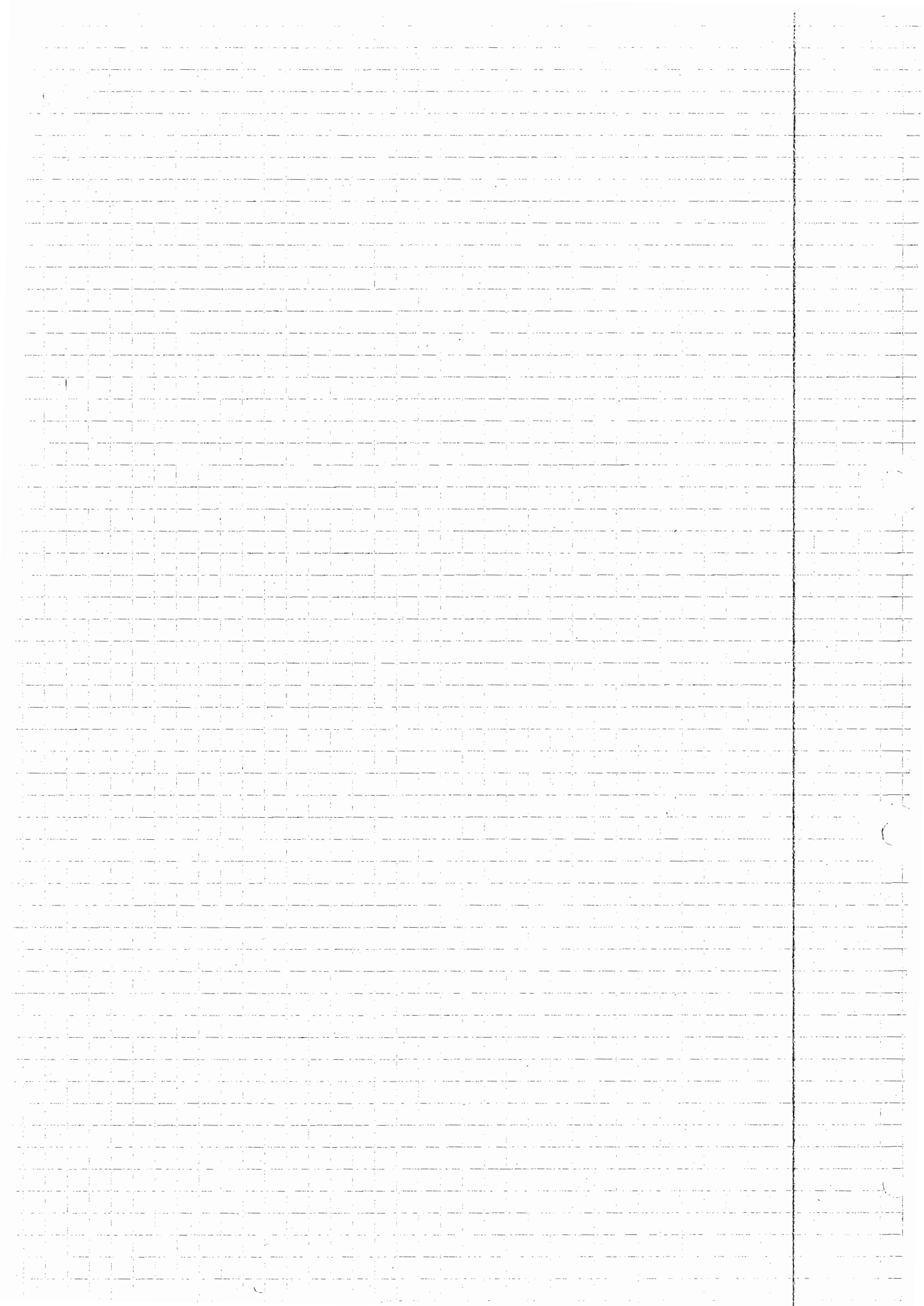
III: Integralgeometrie

IV: Spezielle inverse Probleme

Üb. Gruppe Mi 9-11 SR 2

Mi 11-13 SR 2

Do 17-19 SR 7



Teil I: Diskrete inverse Probleme§1 Transmutationen

$T_0, T$   $(n, n)$ -Matrizen, reell

$L$   $(n, n)$ -Matrix ist eine Transmutation für  $T_0, T$

$\Leftrightarrow T_0 L = L T$  in den Zeilen  $1, \dots, m-1$

$\Leftrightarrow \boxed{E T_0 L = E L T}$  mit  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_0 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 & & \\ \gamma_1 & & & \\ & & & \beta_{n-1} \\ & & \gamma_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} d_1^0 & \beta_1^0 & & \\ \gamma_1^0 & & & \\ & & & \beta_{n-1}^0 \\ & & \gamma_{n-1}^0 & d_n^0 \end{pmatrix}$$

Satz 1.1

Sei  $\beta_i^0 \neq 0 \quad i=1, \dots, m-1$ . Dann gibt es genau eine Transmutation von  $T_0, T$ , welche eine Dreiecksmatrix ist mit  $(1,1)$ -Element 1.

Beweis:

$$L = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}. \quad E T_0 L = E L T \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} d_1^0 e_1 + \beta_1^0 e_2 & = e_1 \cdot T \\ \gamma_{i-1}^0 e_{i-1} + d_i^0 e_i + \beta_i^0 e_{i+1} & = e_i \cdot T \quad i=2, \dots, m-1 \end{cases}$$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \Rightarrow e_2, \dots, e_m$  bekannt wg  $\beta_i^0 \neq 0$

$e_i = (* * * \sigma_i \dots \sigma)$  wie  $T$  triagonal  
 $\uparrow$   
 $i$

/ \* Induktion i mündl. \* /

□

## §2 Das inverse Eigenwertproblem:

### Gelfand - Levitan - Methode

Sei  $T$  symmetrische Tridiagonalmatrix,  
Eigenwerte  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ , Eigenvektoren  $X = (x_1 \dots x_n)$ ,  
 $XX^T = \text{Id}$

Problem: Bestimme  $T$  aus  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  und der ersten Zeile von  $X$ . (Das sind  $2n-1$  Freiheitsgrade)

Definiere zunächst 2 Vektoren  $p(\lambda), p^\circ(\lambda)$ :

$$p_1(\lambda) = 1$$

$$d_1 p_1(\lambda) + \beta_1 p_2(\lambda) = \lambda p_1(\lambda)$$

$$\beta_{i-1} p_{i-1}(\lambda) + d_i p_i(\lambda) + \beta_i p_{i+1}(\lambda) = \lambda p_i(\lambda) \quad i=2, \dots, n-1$$

$$p_1^\circ(\lambda) = 1$$

$$d_n^\circ p_1^\circ(\lambda) + \beta_n^\circ p_2^\circ(\lambda) = \lambda p_1^\circ(\lambda)$$

$$\beta_{i-1}^\circ p_{i-1}^\circ(\lambda) + d_i^\circ p_i^\circ(\lambda) + \beta_i^\circ p_{i+1}^\circ(\lambda) = \lambda p_i^\circ(\lambda) \quad i=2, \dots, n$$

$$\text{"equiv.: } E T p(\lambda) = \lambda E p(\lambda) \quad , \quad p_1(\lambda) = 1$$

$$E T_0 p^\circ(\lambda) = \lambda E p^\circ(\lambda) \quad , \quad p_1^\circ(\lambda) = 1$$

Falls zufällig  $\lambda = \lambda_k \Rightarrow T p(\lambda_k) = \lambda_k p(\lambda_k)$   
(falls  $\lambda \in \text{EW von } T$ )

### Satz 2.1:

Sei  $\beta_i^\circ, \beta_i \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Sei  $L$  die Transmutation von  $T_0, T$  aus Satz 1.1

Dann gilt  $p^\circ(\lambda_k) = L \cdot p(\lambda_k)$  für  $k=1, \dots, n$

$$E T_0 L = E L T$$



②

Beweis:

$$\Psi^\circ(\lambda_k) := L P(\lambda_k) \quad \text{wg } \lambda_k \in W \text{ von } T$$

$$E T_0 \Psi^\circ(\lambda_k) = E T_0 L P(\lambda_k) = E L T P(\lambda_k) \stackrel{\downarrow}{=} \lambda_k E L P(\lambda_k) =$$

$$\lambda_k E L P(\lambda_k) \stackrel{\uparrow}{=} \lambda_k E L P(\lambda_k) \stackrel{\text{L Transm.}}{=} \lambda_k E L P(\lambda_k)$$

$$\lambda_k E \Psi^\circ(\lambda_k)$$

$$\text{Es gilt auch: } E T_0 P^\circ(\lambda_k) = \lambda_k E P^\circ(\lambda_k)$$

denn das gilt  $\forall \lambda \in W$  (Def. von  $P^\circ$ )

$$P_1^\circ(\lambda_k) = 1 \Rightarrow \Psi^\circ(\lambda_k) = 1 \quad \text{wg } e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \text{ } \Delta\text{-Matrix}$$

Also erfüllen  $\Psi^\circ(\lambda_k)$ ,  $P^\circ(\lambda_k)$  dieselbe Beziehung.

Diese ist aber eindeutig lösbar!  $\Rightarrow$

$$\Psi^\circ(\lambda_k) = P^\circ(\lambda_k) \quad k=1, \dots, m$$

□

### Satz 2.2

Sei  $T$  eine symm. Triagonalmatrix mit  $\beta_i > \sigma$ ,  
 Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , Eigenvektoren  
 $X = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $X^t \cdot X = I$ . Die erste Zeile von  
 $X$  sei positiv. Dann ist  $T$  durch die Eigenwerte  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und die erste Zeile von  $X$  eindeutig  
 bestimmt.

Beweis:

Sei  $T_0$  irgendeine symm. Triagonalmatrix mit  
 $\beta_i^\circ > \sigma$ . Bilde  $\varphi(\lambda)$ ,  $\varphi^\circ(\lambda)$  wie im Satz 2.1

$\Phi(\lambda) = (\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n))$ . (Annahme  $\lambda_i \neq \lambda_k$ ,  $i \neq k$ ,  
 die Vor. ist unwesentlich)

$$\Phi_0(\lambda) = (\varphi^\circ(\lambda_1), \dots, \varphi^\circ(\lambda_n))$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/x_{11} & & \sigma \\ & \ddots & \\ \sigma & & 1/x_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ & * & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I} & \quad \Phi = X \cdot P \\ \text{II} & \quad \Phi_0 = L \cdot \Phi \end{aligned}$$

wg  $\Psi(\lambda_k) \in V$  von  $T$   
(nach Satz 2.1)

Gelfand - Lewitan:

$$X^t X = I \Rightarrow X X^t = I$$

$X^t = X^{-1}$

I  $X = \Phi \cdot P^{-1}$  Setze das ein:  $(X^t = P^{-1} \Phi^t)$   
 $\Phi P^{-1} P^{-1} \Phi^t = I \Rightarrow \Phi P^{-2} \Phi^t = I$

II  $\Phi = L^{-1} \cdot \Phi_0$  Setze das ein:  $(\Phi^t = \Phi_0^t L^{-t})$   
 $L^{-1} \Phi_0 P^{-2} \Phi_0^t L^{-t} = I$

$$\underbrace{\Phi_0 P^{-2} \Phi_0^t}_{\text{bekannt}} = L L^t$$

$$A := \Phi_0 P^{-2} \Phi_0^t$$

L wird bestimmt durch Cholesky-Zerlegung von A.  
 L ist dadurch eindeutig bestimmt bis auf  
 Rechtsmultiplikation mit einer Matrix  $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$

Berechnung von T:  
 $T = \Phi \wedge \Phi^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  weil

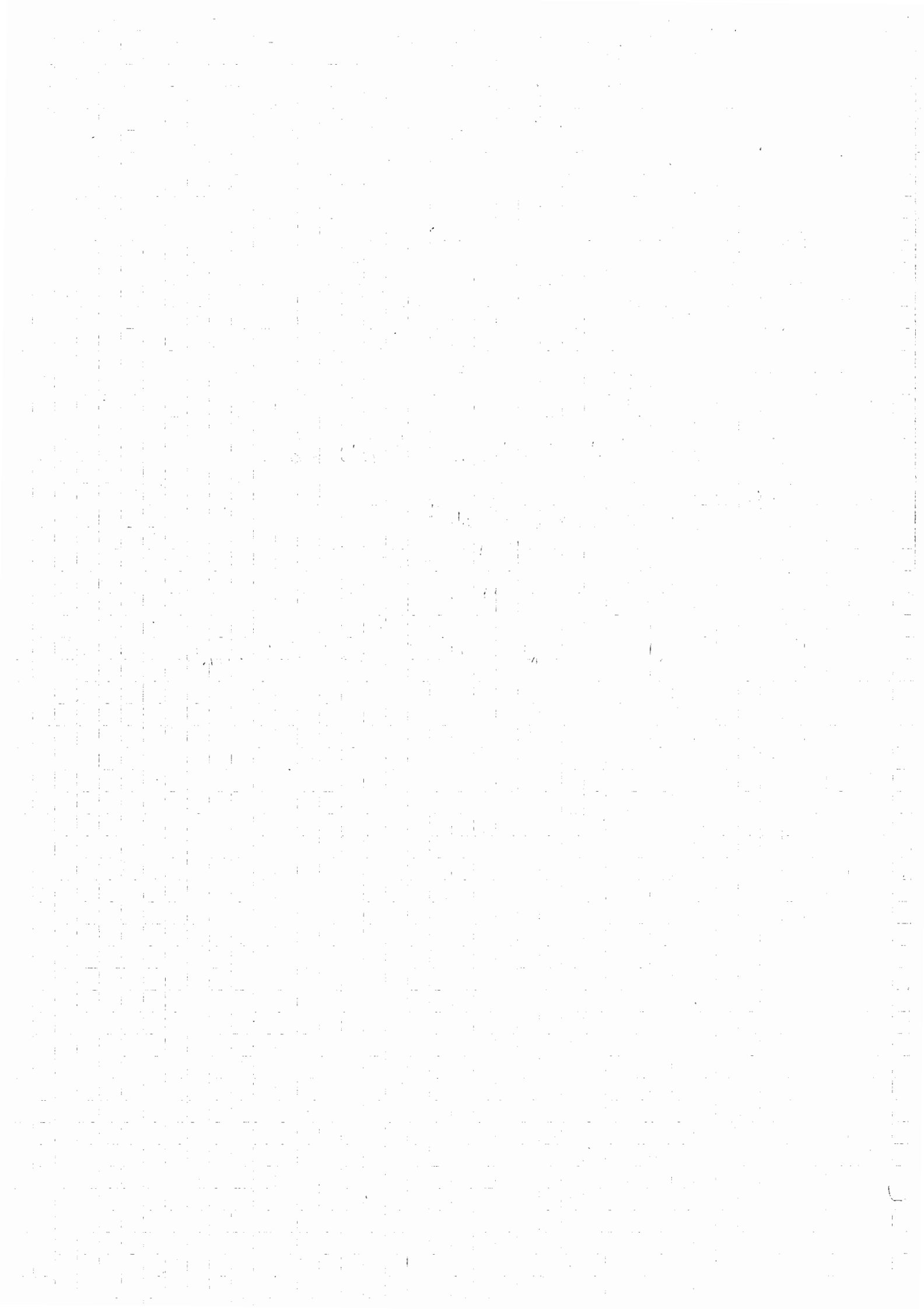
$\Phi$  Matrix von Eigenvektoren.  
 $\Phi = L^{-1} \cdot \Phi_0$  Setze das ein:  
 $T = L^{-1} \underbrace{\Phi_0 \wedge \Phi_0^{-1}}_{\text{bekannt}} L$

Diese Beziehung bestimmt (trotz der Mehrdeutigkeit in L) die Zahlen  $d_i$  und die Zahlen  $\beta_i$  bis auf's Vorzeichen. ( $\beta_i$  positiv  $\Rightarrow$  macht nichts)

Bemerkungen:

- 1) Beweis ist konstruktiv  
wesentlicher Schritt: Cholesky-Zerlegung
- 2) Verallgemeinerung? Wärm.
- 3) Gelfand-Levitán ist stabil

$$\phi_0^{-1} = (L \phi)^{-1} = (L \times P)^{-1} = P^{-1} \times L^{-1}$$



### §3 Das inverse Eigenwertproblem: Methode von Lanczos

Lanczos:  $A$  symm (reell),  $\|u_1\| = 1$

gesucht: Tridiagonalmatrix  $T$ ,

unitäre Matrix  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

sodass  $TU = UA$

Annahme,  $u_i, T$  existieren.

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ \beta_1 & & & & \\ & \beta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-1} & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

Tridiagonalmatrix, die zu  $A$  ähnlich ist!

$$(*) \quad \beta_i u_{i-1} + d_i u_i + \beta_i u_{i+1} = u_i A \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (u_0 = 0)$$

$$i=1: \quad d_1 = u_1 A u_1^t$$

$$d_1 := u_1 A - d_1 u_1$$

$$\beta_1 := \|d_1\|, \quad u_2 = d_1 / \beta_1 \quad \checkmark$$

Annahme:  $d_1 \dots d_{i-1}, \beta_1 \dots \beta_{i-1}, u_1 \dots u_i$  bestimmt

$$d_i = u_i A u_i^t \quad (\text{von rechts mit } u_i^t \text{ multipl.})$$

$$d_i = u_i A - \beta_{i-1} u_{i-1} - d_i u_i$$

$$\beta_i = \|d_i\|$$

$$u_{i+1} = d_i / \beta_i$$

#### Satz 3.1

Sei  $d_i \neq 0$ ,  $i=1, \dots, n-1$ . Dann bilden die  $u_i$  eine unitäre Matrix.

Beweis:

$$\text{z.z.: } (u_i, u_k) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies sei richtig für  $u_1 \dots u_i$

$$\|u_{i+1}\| = 1 \quad \checkmark$$

$$d_i u_{i-1}^t = \underbrace{u_i A u_i^t}_{= d_i} - \beta_{i-1} \underbrace{u_{i-1} u_{i-1}^t}_{= 0} - d_i \underbrace{u_i u_i^t}_{= 1} = 0$$

$$\Rightarrow u_{i+1} u_i^t = 0$$

$$\begin{aligned} d_i u_{i-1}^t &= u_i^t \mathbb{A} u_{i-1}^t - \beta_{i-1} u_{i-1} u_{i-1}^t - d_i \underbrace{u_i u_{i-1}^t}_{=0} \\ &= u_i^t \mathbb{A} u_{i-1}^t - \beta_{i-1} \end{aligned}$$

Multipliziere die Rek.-Formel (\*) von rechts mit  $u_i^t$ :

$$\beta_{i-1} u_{i-1} u_i^t + d_i u_i u_i^t + \beta_i u_{i+1} u_i^t = u_i^t \mathbb{A} u_i^t$$

Ersetze  $i$  durch  $i-1$  (vom multiplizieren!)

$$\beta_{i-2} \underbrace{u_{i-2} u_i^t}_{=0} + d_{i-1} \underbrace{u_{i-1} u_i^t}_{=0} + \beta_{i-1} \underbrace{u_i u_i^t}_{=1} = u_{i-1}^t \mathbb{A} u_i^t$$

$$\Rightarrow \beta_{i-1} = u_{i-1}^t \mathbb{A} u_i^t = u_i^t \mathbb{A} u_{i-1}^t \quad (\text{transponiert})$$

$$\Rightarrow d_i u_{i-1}^t = u_i^t \mathbb{A} u_{i-1}^t - \beta_{i-1} = 0 !$$

$$\Rightarrow u_{i+1} u_{i-1}^t = 0$$

bleibt zu zeigen:

$$u_{i+1} u_j^t = 0 \quad \text{für } j < i-1$$

$$d_i u_j^t = u_i^t \mathbb{A} u_j^t \quad (\text{Definition von } d_i \text{ eingesetzt})$$

$$\langle u_1 \dots u_j \rangle = \langle u_1, u_1 \mathbb{A}, \dots, u_1 \mathbb{A}^{j-1} \rangle$$

(siehe Bildungsprinzip der  $u_i$ )

$$\begin{aligned} u_j \cdot \mathbb{A} &\in \langle u_1 \mathbb{A}, u_1 \mathbb{A}^2, \dots, u_1 \mathbb{A}^j \rangle \subseteq \langle u_1, u_2, \dots, u_{j+1} \rangle \\ &\subseteq \langle u_1 \dots u_{i-1} \rangle \quad \text{wg } j < i-1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_j \cdot \mathbb{A} \cdot u_i^t = 0 \quad \text{für } j < i-1$$

$$\Rightarrow d_i u_j^t = 0 \quad \Rightarrow u_{i+1} u_j^t = 0 \quad j < i+1$$

Die  $n$ 'te Gleich. ist erfüllt wg  $u_{n+1}$  orth zu  $\{u_1 \dots u_n\}$ ,  $\Rightarrow 0$

Problem: instabil. □

### Anwendung von Lanczos auf das inverse Problem:

Bestimme  $T = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \beta_1 & & \\ & \beta_1 & \beta_{n-1} & \\ & & \beta_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$  aus den Eigenwerten

$\lambda_1 \dots \lambda_n$  und der ersten Zeile der unitären

Matrix  $X$  der Eigenvektoren.

Lanczos für  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

} Gelfand-Levitan eher zu empfehlen.

## §4 Ein inverses Evolutionsproblem

(2)

$$u^{e+1} = T u^e \quad T = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 & & \\ \gamma_1 & & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_{n-1} \\ & & & \gamma_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \quad u^0 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_i^e = g^e \quad e = 0, \dots, 2n-1$$

Problem:  $g^e$  bekannt  $\beta_i, \gamma_i$  bekannt  
 gesucht:  $d_i$ !

### Satz 4.1

$$\gamma_i, \beta_i \neq 0 \quad i=1, \dots, n-1$$

Dann sind die  $d_i$  eindeutig bestimmt.

Beweis

$$T = T_0 + Q \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{pmatrix} \quad T_0 \text{ triagonal}$$

$\uparrow$  bekannt       $\uparrow$  gesucht

Es gibt Transmutation  $L$  von  $T_0, T$ ,  $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$E T_0 L = E L T$$

$$E L u^{e+1} = E L T u^e = E T_0 L u^e$$

$$\underline{z^e = L u^e} : E z^{e+1} = E T_0 z^e \quad \text{d.R.}$$

$$\underline{z^{e+1} = T_0 z^e \text{ in Komponenten } 1, \dots, n-1}$$

Beh.: Für  $k=0, 1, \dots, n-1$  gilt:

$$z_i^{e+k} = (T_0^k z^e)_i; \quad i=1, \dots, n-k$$

Induktion nach  $k$ :

$$k=0 : z_i^e = z_i^e \quad i=1, \dots, n \quad \checkmark$$

I.V.: Beziehung sei richtig für ein  $k$  mit  $0 \leq k < n-1$

$$I.S.: z_i^{e+k+1} = (T_0 z^{e+k})_i; \quad i=1, \dots, n-1$$

$(T_0 z^{e+k})_{i, n-k}$  enthält nur Komponenten von  $z^{e+k}$  mit Index  $i \leq n-k$ .

Für diese Indizes gilt die Induktionsver.

$$z_i^{e+k+1} = (T_0 T_0^k z^e)_i; \quad i=1, \dots, m-k-1$$

$$= (T_0^{k+1} z^e)_i; \quad i=1, \dots, m-k-1$$

Das ist die Beh. für  $k+1$ .

$$g^{e+k} = u_1^{e+k} = z_1^{e+k} = (T_0^k z^e)_1 \quad R, e=1, \dots, m-1$$

$$(u_0^k)^t = e_1^t T_0^k \quad (\text{erste Zeile von } T_0^k)$$

$$\boxed{g^{e+k} = (u_0^k)^t z^e}$$

$$u_0^{k+1} = T_0^t u_0^k \quad u_0^0 = e^1$$

$$z = (z^0 \dots z^{n-1})$$

$$G =$$

$$\begin{pmatrix} g^0 & g^1 & \dots & g^{n-1} \\ g^1 & g^2 & \dots & g^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g^{n-1} & g^n & \dots & g^{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$u_0 = (u_0^0, \dots, u_0^{n-1}) \leftarrow$$

$$u = (u^0, \dots, u^{n-1}) \leftarrow \begin{matrix} \text{rechte} \\ \Delta\text{-Matrizen} \end{matrix}$$

zus.-passend:  $G = u_0^t \cdot z$

Diagonalelemente von  $u$ :  $\prod_{i=1}^k \delta_i; \quad k=0, \dots, m-1$

$$\sigma$$

Diagonalelemente von  $u_0$ :  $\prod_{i=1}^n \beta_i; \quad k=0, \dots, m-1$

$$\sigma \quad \text{für } n \text{ groß numerisch schlecht verwirklicht}$$

$$z = L \cdot u \quad (\text{wg } z^e = L u^e)$$

$$\Rightarrow G = u_0^t L u, \quad L u = \underbrace{u_0^{-t} G}_{\text{bekannt}}$$

$G$ : Daten

$u_0$ : gewöhnt

Die Diagonale von  $u$  ist bekannt.

$\square \cdot \square$  eindeutig wg Diagonale von  $u$  bekannt.

$L \cdot u$  berechnen sich eindeutig durch  $LU$ -Zerlegung aus  $u_0^{-t} G$ . Daraus läßt sich  $a$  berechnen. (aus  $L, u$ )



## II Gelände-Reizung - Theorie

## §1 Selbstadjungierte Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Dgl im endlichen Intervalle

Literatur: Goddington, Zwisson

Sei  $Lu := p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u$   
 mit  $p_j \in C^{n-j} [a, b]$ ,  $p_0(x) \neq 0$  auf  $[a, b]$   
 und sei  $R_k u = \sum_{j=1}^m M_{j,k} u^{(j-1)}(a) + N_{j,k} u^{(j-1)}(b)$   
 $k=1, \dots, m$

Betr. Eigenwertprobleme, d.R.

 $Lu = \lambda u$  in  $[a, b]$ ,  $R_k u = 0$  (d.h.  $R_k u = 0$   $k=1, \dots, m$ ) (1)~~Beispiele:~~

~~1)  $u'' = \lambda u$~~

Def.:

Jedes  $\lambda$ , für das Problem (1) eine Lösung  
 $u \in C^n - \{0\}$  hat, heißt Eigenwert und  $u$  heißt  
 zugehörige Eigenfunktion

Beispiele

1)  $-u'' = \lambda u$

$u(0) = u(1) = 0$

- hat Eigenwerte  $\lambda_k = k^2 \pi^2$  und

Eigenfunktionen  $u_k(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k\pi x)$

-  $u_k$  bilden vollständiges Orthonormalsystem in  $L_2(a, b)$ ,  
 d.h. jedes  $f \in L_2(a, b)$  hat Darstellung

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k \quad c_k = (f, u_k)_{L_2} \quad (\text{Konv. in } L_2)$$

$$2) \quad u' = \lambda u, \quad u(0) = 0$$

$$\Rightarrow u(x) = c e^{\lambda x}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

d.h. es existieren keine Eigenwerte

$$3) \quad i \cdot u' = \lambda u, \quad u(1) - u(0) = 0$$

Eigenwerte  $\lambda_k = 2\pi k$

Eigenfunktion  $u_k = e^{-2\pi i k x} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Entwicklung nach  $u_k$  ist Fourierreihe

Def.:

(1) heißt selbstadjungiert, wenn für alle  $u, v \in C^m$  mit  $Ru = Rv = 0$  gilt:  $(Lu, v)_{L_2} = (u, Lv)_{L_2}$

Beispiel:

$$Lu = -(pu')' + qu$$

a)  $\cos \alpha u'(a) + \sin \alpha u'(b) = 0$   
 $\cos \beta u'(b) - \sin \beta u'(a) = 0$  } damit selbstadjungiert

b)  $u(a) = u(b)$   
 $u'(a) = u'(b)$  } damit selbstadjungiert 1/2 nur falls  $p(a) = p(b)$

c)  $u(a) = u'(a) = 0$  } nicht selbstadjungiert

Ziel: selbstadjungierte Eigenwertprobleme besitzen abzählbar unendlich viele Eigenwerte und die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

Satz

Inhomogenes Problem:

$$Lu = \lambda u + f, \quad \text{für } Ru = 0 \quad \text{e Konstante} \quad (2)$$

Satz (Green'sche Funktion)

Sei  $\lambda$  kein Eigenwert von (1). Dann gibt es eine Funktion  $G_\lambda(x, y)$  mit folgenden Eigenschaften:

$$1) \quad \frac{\partial^k G_\lambda(x, y)}{\partial x^k} \text{ stetig für } k=0, \dots, m-2$$

Für  $k=m-1$  hat man Stetigkeit nur für  $x \neq y$

und es gilt:

$$\frac{\frac{\partial^{m-1} G_\lambda(x+\sigma, x)}{\partial x^{m-1}}}{\text{Grenzwert von rechts}} - \frac{\frac{\partial^{m-1} G_\lambda(x-\sigma, x)}{\partial x^{m-1}}}{\text{Grenzwert von links}} = \frac{1}{p_0(x)}$$

$$2) \quad \text{Für festes } y \text{ sei } u(x) := G_\lambda(x, y). \text{ Dann gilt für } x \neq y: Lu = \lambda u \text{ und } Ru = 0$$

$$3) \quad \text{Die Funktion } u(x) := \int_a^b G_\lambda(x, y) f(y) dy \text{ löst (2)}$$

$$4) \quad \text{Ist (1) selbstadjungiert und } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ dann gilt } G_\lambda(x, y) = \overline{G_\lambda(y, x)}$$

Beweis:

Sei  $\phi_1, \dots, \phi_n$  Fundamentalsystem von  $(L-e)$   
 und  $W(x) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \dots & \phi_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ ,

$$K(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p_0(y)W(y)} \cdot \det \begin{pmatrix} \phi_1(y) & \dots & \phi_n(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-2)}(y) & \dots & \phi_n^{(n-2)}(y) \\ \phi_1^{(n-1)}(y) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(y) \end{pmatrix} & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$$

Eigenschaften von  $K$ :

a)  $\frac{\partial^k K(x, y)}{\partial x^k}$  ist stetig für  $k = 0, \dots, n-2$

Betr. dem Fall  $x > y$ :

$$\frac{\partial^k K(x, y)}{\partial x^k} = \frac{1}{p_0(y)W(y)} \cdot \det \begin{pmatrix} \phi_1(y) & \dots & \phi_n(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-2)}(y) & \dots & \phi_n^{(n-2)}(y) \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } x \rightarrow y \Rightarrow \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, n-2 \\ \frac{1}{p_0(x)} & k = n-1 \end{cases}$$

$$b) \frac{\partial^{n-1} K(x+\sigma, x)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} K(x-\sigma, x)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(x)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= 0 \text{ nach Def}}$

$$c) (L_x - e)K = 0 \quad x \neq y \quad \begin{cases} x > 0 : K \text{ ist als Fkt von } x \\ \text{Linearkombination der } \phi_j \\ x < 0 : \text{ wg } K = 0 \end{cases}$$

③

$$V(x) := \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

$$= \int_a^x K(x, y) f(y) dy \quad (\text{wg } K \text{ sonst Null})$$

$$V^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^k K(x, y)}{\partial x^k} f(y) dy + \frac{\partial^{k-1} K(x+0, x)}{\partial x^{k-1}} f(x)$$

$$= \begin{cases} \int_a^x \dots dy & k=0, \dots, m-1 \\ \int_a^x \dots dy + \frac{f(x)}{p_0(x)} & k=m \end{cases}$$

$$(L-e)V = p_0 V^{(n)} + \dots + p_m V - eV$$

$$= f(x) + p_0 \int_a^x \frac{\partial^n K(x, y)}{\partial x^n} f(y) dy +$$

$$p_1 \int_a^x \frac{\partial^{n-1} K(x, y)}{\partial x^{n-1}} f(y) dy + \dots +$$

$$(p_n - e) \underbrace{\int_a^x K(x, y) f(y) dy}_{= V}$$

$$= f(x) + \underbrace{\int_a^x (L_x - e) K(x, y) f(y) dy}_{= 0 \text{ wg c)}} = f(x)$$

=> V erf\u00fcllet Dge.

"G = G(y)"

$$G_e(x, y) = K(x, y) + \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$$

Bestimme  $c_j$  soda\u00df  $RG(\cdot, y) = 0$

$$\text{d.h. } \sum_{j=1}^m c_j R_k \phi_j = -R_k K(\cdot, y) \quad k=1, \dots, m$$

IA:  $\det(R_k \phi_j) = 0 \Rightarrow$  Ker nicht trivial  $\Rightarrow$

$$\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \ker(R_k \phi_j) - \{0\}$$

$$u_k = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j \quad \text{erfüllen } Lu = \lambda u, \quad Ru = 0$$

⚡ da  $\lambda$  kein Eigenwert

$\Rightarrow \det(R_k \phi_j) \neq 0$  („damit 1-3 bewiesen“)

Zus.: a) b) c)  $\Rightarrow$  i) ii) iii)

i) wg a) b)

Noch zu zeigen: iv)

$$L_e := (L - e), \quad (\psi_e f)(x) = \int_a^b G_e(x, y) f(y) dy$$

(1) selbstadjungiert,  $e \in \mathbb{R}$  nach Vor.  $\Rightarrow$

$$(L_e u, v) = (u, L_e v) \quad \forall u, v \in C^m \text{ und } Ru = Rv = 0$$

(„nur nachrechnen“)

$$u = \psi_e(f) \quad v = \psi_e(g) \quad \Rightarrow$$

$$(f, \psi_e g) = (\psi_e f, g) \quad \forall f, g \in C[a, b]$$

$\Rightarrow$  iv)

Problem der letzten Vorlesung:

$$(1) \quad Lu = \lambda u \quad [a, b], \quad Ru = 0$$

Im folgenden sei  $\ell = 0$  kein EW von (1) und

$G(x, y)$  Green'sche Funktion zu  $\ell = 0$

$$(\mathcal{G}u)(x) := \int_a^b G(x, y) u(y) dy$$

$$(1) \Leftrightarrow u = \lambda \mathcal{G}u \quad \text{d.R.}$$

$$\lambda \text{ ist EW von (1)} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ EW von } \mathcal{G}$$

Satz 2:

Ein selbstadjungiertes EW-Problem hat höchstens abzählbar viele EW. Die EW sind alle reelle und häufen sich nur im unendlichen. Zu jedem EW gibt es höchstens  $n$  linear unabhängige Eigenfunktionen und Eigenfunktionen zu versch. EW sind orthogonal in  $L_2(a, b)$

Beweis:

$u, v$  Eigenfunktionen zu EW  $\lambda, \mu$ :

$$0 = (Lu, v) - (u, Lv) = (\lambda - \bar{\mu})(u, v)$$

$$u = v, \quad \lambda = \mu \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow (u, v) = 0$$

Seien  $\phi_1(x, \ell), \dots, \phi_n(x, \ell)$  Fundamentalsystem zu  $(L - \ell)u = 0$ .

$\phi_i$  sind analytische Fkt. in  $\ell$

Warum?

$$\ell \text{ ist EW von (1)} \Leftrightarrow \mathcal{D}(\ell) := \det(R_{\ell} \phi_j) = 0$$

$\mathcal{D}(\ell)$  ist analytische Fkt in  $\ell$

A: EW häufen sich im endlichen  $\Rightarrow$

$$\mathcal{D}(\ell) = 0 \text{ auf einer nicht diskreten Menge} \Rightarrow \text{Identitäts-}$$

$$\mathcal{D} \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{C} \quad \hookrightarrow \text{alle EW reell}$$

□

## Beschränkter

Def.: Ein linearer ~~Kompakter~~ Operator  $T$  heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.

Beispiel: lineare beschränkte Operatoren mit endl.-dim. Wertebereich sind kompakt

Lemma:  $M \subset L_2(a, b)$  ist genau dann relativ kompakt, wenn gilt:

- i)  $M$  ist beschränkt
- ii)  $M$  ist im quadratischen Mittel gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall f \in M :$$

$$|h| < \delta \Rightarrow \|f - f_R\| < \varepsilon \quad \text{mit}$$

$$f_R = \begin{cases} f(x+h) & x+h \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 3:

Sei (1) selbstadjungiert. Dann ist  $G$  ein kompakter hermitescher Operator in  $L_2(a, b)$

Beweis:

Hermitesch, linear  $\hookrightarrow$  (siehe Satz 1)

Beschränktheit:  $|(\mathcal{G}u)(x)| = \left| \int_a^b G(x, y) u(y) dy \right| \leq$

$$\left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \underbrace{\left( \int_a^b |u(y)|^2 dy \right)^{1/2}}_{= \|u\|}$$

$$\|\mathcal{G}u\|^2 = \int_a^b |(\mathcal{G}u)(x)|^2 dx \leq \underbrace{\int_a^b \int_a^b |G(x, y)|^2 dy dx}_{\text{Konstant}} \|u\|^2$$



Kompaktheit:

$$\text{analog: } \|(\mathcal{G}u)_h - (\mathcal{G}u)\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |G(x+h, y) - G(x, y)|^2 dx dy \|u\|^2$$

$$\mathcal{G} \in L_2((a, b) \times (a, b))$$

$L_2$ -Fkt sind im quadr. Mittel stetig

$$\text{d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sodass } \int_a^b \int_a^b \dots dx dy \leq \varepsilon \quad \forall |h| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \|(\mathcal{G}u)_h - (\mathcal{G}u)\| \leq \varepsilon \cdot \|u\|$$

$$\Rightarrow M = \{\mathcal{G}u : \|u\| \leq 1\} \text{ ist relativ kompakt}$$

□

Satz:

Sei  $\mathcal{G}$  ein linearer stetiger hermitescher Operator.

$$\text{Dann gilt } \|\mathcal{G}\| = \sup_{\|u\|=1} |(\mathcal{G}u, u)|$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \gamma := \sup_{\|u\|=1} |(\mathcal{G}u, u)| &\Rightarrow \gamma \leq \sup_{\|u\|=1} (\mathcal{G}u, \mathcal{G}u)^{1/2} (u, u)^{1/2} \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} \|\mathcal{G}\| \cdot \|u\|^2 = \|\mathcal{G}\| \end{aligned}$$

$$\text{z.z.: } \gamma \geq \|\mathcal{G}\|.$$

$$(\mathcal{G}(u+v), (u+v)) = \|u+v\|^2 \left( \mathcal{G} \frac{u+v}{\|u+v\|}, \frac{u+v}{\|u+v\|} \right)$$

$$\leq \gamma \|u+v\|^2$$

$$\begin{aligned} \gamma \|u+v\|^2 &\geq (\mathcal{G}(u+v), u+v) = (\mathcal{G}u, u) + (\mathcal{G}v, v) + (\mathcal{G}u, v) + (\mathcal{G}v, u) \\ &= (\mathcal{G}u, u) + (\mathcal{G}v, v) + 2 \cdot \text{Re}(\mathcal{G}u, v) \end{aligned}$$

analog:

$$-\gamma \|u-v\|^2 \leq (\mathcal{G}u, u) + (\mathcal{G}v, v) - 2 \cdot \text{Re}(\mathcal{G}u, v)$$

Subtraktion  $\Rightarrow$

$$4 \cdot \text{Re}(\mathcal{G}u, v) \leq \gamma (\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2\gamma (\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

$$\|u\|=1, v = \mathcal{G}u/\|Gu\| \text{ einsetzen } \Rightarrow$$

$$4. \operatorname{Re} \frac{(\mathcal{G}u, \mathcal{G}u)}{\|Gu\|} \leq 4\gamma$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\|Gu\| \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{G}\| \leq \gamma$$

Satz 5

$\mathcal{G}$  kompakt, Hermitescher Operator. Dann ist entweder  $\|\mathcal{G}\|$  oder  $-\|\mathcal{G}\|$  Eigenwert von  $\mathcal{G}$ .

Beweis:

$$\text{OE: } \|\mathcal{G}\| = \sup_{\|u\|=1} (\mathcal{G}u, u) > 0$$

( Falls  $\|\mathcal{G}\| = -\inf_{\|u\|=1} (\mathcal{G}u, u)$  Beweis für  $-\mathcal{G}$  )

$\exists$  Folge  $u_m$  mit  $\|u_m\|=1$  und  $(\mathcal{G}u_m, u_m) \rightarrow \mu_0 := \|\mathcal{G}\|$

$\mathcal{G}$  kompakt  $\Rightarrow$  OE  $\mathcal{G}u_m \rightarrow \varphi_0$

Beh.:  $\varphi_0$  ist Eigenfunktion zum EW  $\mu_0$

$$\|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\|^2 = \|\mathcal{G}u_m\|^2 + \mu_0^2 - 2\mu_0 (\mathcal{G}u_m, u_m)$$

$$\rightarrow \|\varphi_0\|^2 - \mu_0^2$$

$$\|\mathcal{G}u_m\|^2 \leq \|\mathcal{G}\|^2 \|u_m\|^2$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\|^2 \leq 2\mu_0^2 - 2\mu_0 (\mathcal{G}u_m, u_m) \rightarrow 0$$

Zus.  $\Rightarrow \mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m \rightarrow 0, \|\varphi_0\|^2 = \mu_0^2 \neq 0 \Rightarrow \varphi_0 \neq 0$

$$\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0 \varphi_0\| = \|\mathcal{G}\varphi_0 - \mathcal{G}\mathcal{G}u_m + \mathcal{G}\mathcal{G}u_m - \mu_0 \mathcal{G}u_m + \mu_0 \mathcal{G}u_m - \mu_0 \varphi_0\|$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0 \varphi_0\| \leq \|\mathcal{G}\varphi_0 - \mathcal{G}\mathcal{G}u_m\| + \|\mathcal{G}\mathcal{G}u_m - \mu_0 \mathcal{G}u_m\| + \|\mu_0 \mathcal{G}u_m - \mu_0 \varphi_0\|$$

$$\leq \|\mathcal{G}\| \underbrace{\|\varphi_0 - \mathcal{G}u_m\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|\mathcal{G}\| \|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\mu_0 \|\mathcal{G}u_m - \varphi_0\|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}\varphi_0 = \mu_0 \varphi_0$$

□

Satz 6

Sei (1) selbstadjungiert. Dann hat (1) <sup>abzählbar</sup> unendlich viele EW  $\lambda_k$  mit  $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots$  und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in  $L_2(a, b)$

Beweis:

 Zeige:  $\mathcal{G}$  hat EW  $\mu_k$  mit  $|\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \dots$ 

 Satz 5  $\Rightarrow \exists$  EW  $\mu_0$  zu Eigenfkt  $u_0$  mit  $\|u_0\| = 1$ 

$$G_1(x, y) := \mathcal{G}(x, y) - \mu_0 u_0(x) \bar{u}_0(y)$$

$$(\mathcal{G}_1, u)(x) := \int_a^b G_1(x, y) u(y) dy$$

 Satz 5  $\Rightarrow \exists$  EW  $\mu_1$  zu Eigenfunktion  $u_1$  mit  $\|u_1\| = 1$ 

$$\text{und } |\mu_1| = \sup_{\|u\|=1} |(\mathcal{G}_1, u, u)|$$

 $u \in L_2(a, b)$ 

$$(\mathcal{G}_1, u, u_0) = \int_a^b (\mathcal{G}_1, u)(x) \bar{u}_0(x) dx =$$

$$\int_a^b \int_a^b (G(x, y) - \mu_0 u_0(x) \bar{u}_0(y)) u(y) \bar{u}_0(x) dy dx =$$

$$\int_a^b \int_a^b G(x, y) \bar{u}_0(y) \bar{u}_0(x) dy dx -$$

$$\mu_0 \int_a^b \int_a^b u_0(x) \bar{u}_0(y) u(y) \bar{u}_0(x) dy dx$$

$$= (\mathcal{G} u, u_0) - \mu_0 \int_a^b u_0(x) \bar{u}_0(x) dx \int_a^b u(y) \bar{u}_0(y) dy$$

$$= (u, \mathcal{G} u_0) - \mu_0 (u, u_0) = 0$$

$$\text{Für } u = u_1 \Rightarrow (u_1, u_0) = 0$$

(falls  $\mu_1 \neq 0$ )

$$\Rightarrow (\mathcal{G}_1 u_1)(x) = (\mathcal{G}_1 u_1)(x) \quad (\text{Rechnung weggelassen!})$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_1 u_1 = \mathcal{G}_1 u_1 = \mu_1 u_1$$

d.h.  $\mu_1$  ist EW von  $\mathcal{G}_1$

analog: bildet man  $\mathcal{G}_2$  und mit Hilfe von  $\mathcal{G}_1$

Verfahren endet, falls  $\mu_m = 0$ .

$$\mu_m = \|\mathcal{G}_m\| \quad \text{z.z.: } \mathcal{G}_m \neq 0 \quad \forall m$$

$$\mathbb{A}: \quad \sigma = \mathcal{G}_m(x, y) = G(x, y) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k u_k(x) \bar{u}_k(y)$$

$$\sigma = \mathcal{G}_m f \quad f \in L_2(a, b)$$

$$\mathcal{G}_m f(x) = (\mathcal{G}_m f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k u_k(x) (f, u_k)$$

$$\Rightarrow L(\mathcal{G}_m f)(x) = L((\mathcal{G}_m f)(x)) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k L u_k(x) L(f, u_k)$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u_k(x) \cdot (f, u_k)$$

$$\Rightarrow \dim L_2(a, b) < \infty \quad \Downarrow$$

Vollständigkeit:

$$\left\| \mathcal{G}_m u - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k (u, u_k) u_k \right\| =$$

$$\|\mathcal{G}_m u\| \leq |\mu_m| \|u\| \rightarrow 0 \quad \text{nach Satz 2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_m u = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (u, u_k) u_k \quad (\text{Konv. in } L_2)$$

$$f \in C^m \text{ mit } \mathcal{R}f = \sigma \quad u = Lf \Rightarrow f = \mathcal{G}_m u \Rightarrow$$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \underbrace{(Lf, u_k)}_{=(f, Lu_k)} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k) u_k$$

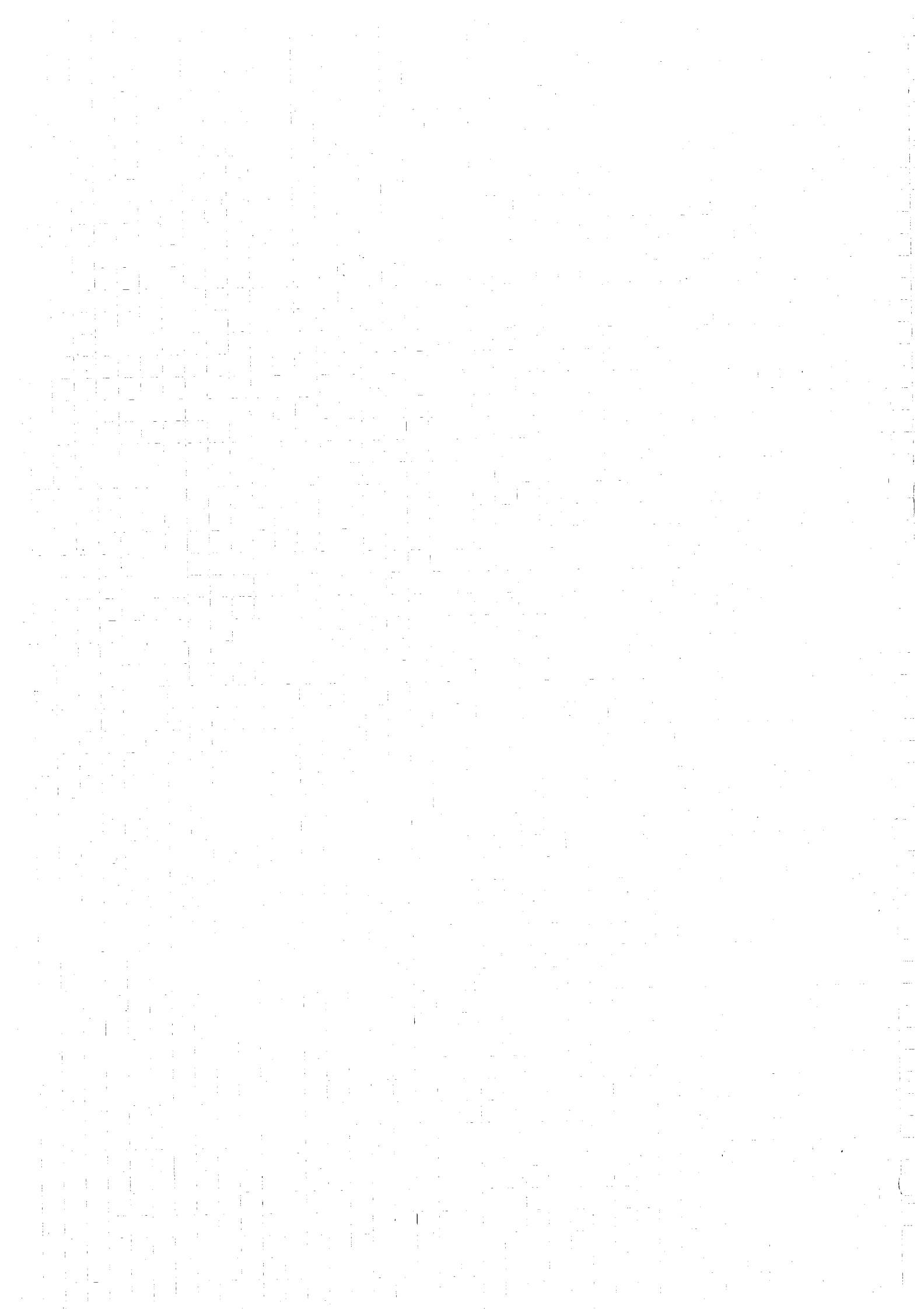
$$Pf := \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k) u_k$$

$P$  ist orthogonale Projektion, d.h.  $\|P\| = 1$

$$\forall f \in C_0^\infty(a,b) \Rightarrow Pf = f$$

$$C_0^\infty \text{ liegt dicht in } L_2(a,b) \Rightarrow Pf = f \forall f \in L_2(a,b)$$

□



§ 2 : Die asymptotische Lösung von Eigenwertproblemen

11.5.92

Sturm - Liouville - Problem :

$$-u'' + qu = \lambda u, \quad q \in C[a, b]$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

Eigenwerte  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$

Eigenfunktionen  $u_0, u_1, \dots$

$\lambda_k, u_k$  für  $k$  groß ?

Satz 2.1 (Maximum - Minimum - Prinzip)

Sei  $Lu = \lambda u, Ru = 0$  ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem mit Eigenwerten  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$

Dann gilt:

$$\lambda_k = \underset{\substack{V \\ \dim V = k}}{\text{Max}} \underset{\substack{\|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Min}} (Lu, u)$$

Beweis:

~~$\lambda_k(V) = \text{Max} (Lu, u)$~~  ~~?~~ ~~\*/~~

$\lambda_k(V) := \underset{\substack{\|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Min}} (Lu, u)$  ,  $V$  linearer Unterraum der Dimension  $k$

①  $u_0, u_1, \dots$  Eigenfunktionen,

$$V = \langle u_0, \dots, u_{k-1} \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda_k(V) = \lambda_k$$

Bew.:

$$u \perp V \Rightarrow u = \sum_{e=k}^{\infty} c_e u_e, \quad Lu = \sum_{e=k}^{\infty} \lambda_e c_e u_e$$

$$\|u\|^2 = \sum_{e=k}^{\infty} c_e^2 = 1 \quad (Lu, u) = \sum_{e=k}^{\infty} c_e^2 \lambda_e$$

$$\lambda_k(V) = \text{Min}_{\sum c_e^2 = 1} \sum_{e=k}^{\infty} c_e^2 \cdot \lambda_e = \lambda_k \quad /* \text{ nur } c_k=1, \text{ andere } 0 /*$$

② Für jedes  $V$  der Dimension  $k$  gilt

$$\lambda_k(V) \leq \lambda_k$$

Bew.: *Außerhalb!!! :-)*

g.z.z.: In  $V$  gibt es  $u$  mit

$$u \perp V, \|u\|=1, Ru=0, (Lu, u) \leq \lambda_k$$

Konstruktion eines solchen  $u$ :

$$u = \sum_{e=0}^k c_e u_e$$

$u \perp V$ :  $k$  lineare homogene Bedingungen an die  $(k+1)$  Koeffizienten  $c_e$

Immer lösbar, sogar unter  $\sum_{e=0}^k c_e^2 = 1$

$$\|u\|^2 = \sum_{e=0}^k c_e^2 = 1$$

$$(Lu, u) = \sum_{e=0}^k \lambda_e c_e^2 \leq \lambda_k \sum_{e=0}^k c_e^2 = \lambda_k$$

$$Lu = \sum_{e=0}^k \lambda_e c_e u_e$$

① und ②  $\Rightarrow$  Beh

□

### Satz 2.2 (Vergleichssatz)

*/\* WICHTIG \*/*

Seien  $L_1 u = \lambda u$ ,  $L_2 u = \lambda u$  zusammen mit der Randbedingung  $Ru = 0$  selbstadjungierte Eigenwertprobleme.

Das erste Problem habe die Eigenwerte  $\lambda_0^1 \leq \lambda_1^1 \leq \dots$ , und es sei  $(L_1 u, u) \leq (L_2 u, u) \quad \forall u$  mit  $Ru = 0$

Dann hat  $L_2$  Eigenwerte  $\lambda_0^2 \leq \lambda_1^2 \leq \dots$  mit

$$\lambda_k^1 \leq \lambda_k^2, \quad k = 0, 1, \dots$$



Beweis:

$$\lambda_k^2 = \underset{\substack{\dim V = k \\ \|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Max}} \underset{\substack{\dim V = k \\ \|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Min}} (L_1 u, u) \leq \underset{\substack{\dim V = k \\ \|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Max}} \underset{\substack{\dim V = k \\ \|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Min}} (L_2 u, u) = \lambda_k^2$$

Anwendung des Vergleichssatzes auf L:

$$Lu = -u'' + qu = \lambda u \quad q \in C[a, b]$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$$\tilde{L}u = -u'' + \tilde{q}u \quad \tilde{q} \in C[a, b]$$

$$d = \text{Max}_{[a, b]} |q(x) - \tilde{q}(x)|$$

$$L_1 u = \tilde{L}u - du \quad L_2 u = \tilde{L}u + du$$

$$(L_1 u, u) \leq (Lu, u) \leq (L_2 u, u)$$

$\tilde{\lambda}_k$  seien die Eigenwerte von  $\tilde{L}u = \lambda u, u(a) = u(b) = 0$

$$\text{Vergleichssatz} \Rightarrow \tilde{\lambda}_k - d \leq \lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k + d$$

Idee: Suche lösbares Vergleichsproblem

Satz 2.3

Sei  $q \in C^0[a, b]$ . Dann gilt für  $R \rightarrow \infty$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 + O(1)$$

$O(1)$  ist beschränkte Funktion in  $R$

Ist sogar  $q \in C^2[a, b]$  so gilt für  $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x) dx + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  bezeichnet Fkt mit  $O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{M}{k^2}$

Beweis:

$$1) \quad q \in C^0[a, b]$$

$$\hat{q} = 0, \quad d = \max_{[a, b]} |q(x)|$$

$$-u'' = \tilde{\lambda} u$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$$\tilde{\lambda}_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 \quad k=0, 1, \dots$$

$$\tilde{\lambda}_k - d \leq \lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k + d \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + O(1)$$

$$|O(1)| \leq d = \max_{[a, b]} |q(x)|$$

$$2) \quad q \in C^2[a, b]$$

WKB - Methode

$$u(x) = \mathcal{R}(x) \sin \phi(x)$$

Ansatz für eine genäherte Eigenfunktion

$$\text{von } Lu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

$$Lu = \cancel{0} \left( \cancel{0} \mathcal{R}'' \sin \phi + \cancel{2} \mathcal{R}' \phi' \cos \phi + \cancel{\mathcal{R}} \phi'' \sin \phi + \cancel{\mathcal{R}} \phi'^2 \sin \phi \right) + q \mathcal{R} \sin \phi$$

$$Lu = - (\mathcal{R}' \sin \phi + \mathcal{R} \phi' \cos \phi)' + q \mathcal{R} \sin \phi$$

$$= - (\mathcal{R}'' \sin \phi + 2 \mathcal{R}' \phi' \cos \phi + \mathcal{R} \phi'' \cos \phi -$$

$$\mathcal{R} \phi'^2 \sin \phi) + q \mathcal{R} \sin \phi$$

$$= - \left( \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}} - \phi'^2 - q \right) \cancel{\sin \phi} u +$$

$$- (2 \mathcal{R}' \phi' + \mathcal{R} \phi'') \cos \phi$$

Bestimme  $\mathcal{R}$  so, daß der Cosinus-Term wegfällt,

$$2 \mathcal{R}' \phi' + \mathcal{R} \phi'' = 0$$

$$\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = - \frac{1}{2} \frac{\phi''}{\phi'}, \quad \ln \mathcal{R} = - \frac{1}{2} \ln \phi'$$

$$\mathcal{R} = (\phi')^{-1/2}$$

spezieller Ansatz: (WKB-Ansatz)

$$u = (\phi')^{-1/2} \sin \phi$$

$$Lu = \underbrace{\left( \phi'^2 + q + \frac{3}{4} \frac{\phi''}{\phi'^2} - \frac{1}{2} \frac{\phi'''}{\phi'} \right)}_{\approx \lambda \text{ für } \lambda \text{ groß}} u$$

$$\phi' = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{2 \cdot \sqrt{\lambda}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Lu &= \left[ \lambda - q + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + q + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] u \\ &= \left( \lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \cdot u \end{aligned}$$

Bestimme  $\lambda$  so, daß  $u$  die Randbedingungen erfüllt.

$$\phi(a) - \phi(b) = (k+1) \frac{\pi}{\cancel{k}}$$
  $k=0, 1, \dots$   $u(a) = u(b) = 0$

$$\begin{aligned} \phi(b) - \phi(a) &= \int_a^b \phi'(x) dx = \sqrt{\lambda} (b-a) - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\lambda}} \int_a^b q dx \\ &= (k+1) \frac{\pi}{\cancel{k}} \end{aligned}$$
  $\uparrow$  soll sein

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } \lambda &= \tilde{\lambda}_k \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_k} (b-a) - \frac{1}{2 \sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_a^b q dx &= (k+1) \frac{\pi}{\cancel{k}} \end{aligned}$$

Man kann zeigen:

$$\tilde{\lambda}_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q dx + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$O\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_k}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Beh. folgt nun nach dem Vergleichsprinzip (Satz 2.2)  $\square$

Bemerkung:

$$q \in C^4 [a; b]$$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x) dx + \frac{c}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

$$c = \frac{1}{\pi(b-a)} \int_a^b (\cancel{q^2 + q''}) q^2 + q'' dx$$

! Aufg 8 mit Satz 2.3 ! /

## Satz 2.5

Sei  $q \in C[a, b]$ . Dann gilt für die (normierte)  
 $k$ 'te Eigenfunktion  $u_k$  von

$$-u'' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

die asymptotische Beziehung  $|u_k(a)| = \lambda_k^{-1/2} \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} + O(\lambda_k^{-1/2}) \right)$   
 $k \rightarrow \infty$

Beweis:

$$a) \quad -u'' + \lambda u = f \quad u(0) = 0 \quad u'(0) = 1 \quad (a=0)$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-y) f(y) dy$$

$$f = qu$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-y) q(y) u(y) dy$$

Lösung von  $-u'' + qu = \lambda u, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$

$$\Rightarrow u(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\lambda = \lambda_k:$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$$

$$\int_0^b u^2(x) dx = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^b \sin^2 \sqrt{\lambda_k} x dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} \left( \frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{1/2}}\right) \right)$$

$$u_k(x) = u_k'(a) \cdot u(x)$$

$$(\text{weg } u_k'(x) = u_k'(a) \cdot u'(x), \quad u'(a) = 1)$$

$$1 = \int_a^b u_{\kappa}^2(x) dx = (u_{\kappa}'(a))^2 \cdot \int_a^b u^2 dx$$

$$(u_{\kappa}'(a))^2 = \frac{1}{\int_a^b u^2 dx} = \lambda_{\kappa} \left( \frac{2}{b-a} + O\left(\frac{1}{\lambda_{\kappa}^{1/2}}\right) \right)$$

□

### § 3 Transmutationen

$$Tu = -u'' + qu, \quad T_0 u = -u'' + q_0 u$$

Transmutation L von  $T_0, T$

$$T_0 Lf = L T f, \quad f \in C^2[a, b], \quad f(a) = 0$$

#### Satz 3.1

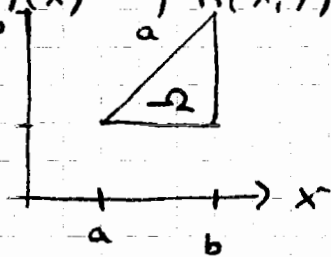
Seien  $q$  und  $q_0 \in C[a, b]$

Dann gibt es genau eine Transmutation L der Form

$$L = I + \mathcal{K} \text{ von } T_0 \text{ und } T, \text{ wobei } (\mathcal{K}f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

mit  $K \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ,

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < x < b \}$$



Beweis:

Annahme, es gibt eine solche Funktion K.

$$\forall f: -(Lf)'' + q_0 Lf = L(-f'' + qf)$$

$$(Lf)(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

$$(Lf)'(x) = f'(x) + K(x, x) f(x) + \int_a^x K_x(x, y) f(y) dy$$

$$(Lf)''(x) = f''(x) + (K(x, x))' f(x) + K(x, x) \cdot f'(x) + K_x(x, x) f(x) + \int_a^x K_{xx}(x, y) f(y) dy$$

$$L f''(x) = f''(x) + \int_a^x K(x, y) f''(y) dy$$

$$= f''(x) - \int_a^x K_y(x, y) f'(y) dy + [K(x, y) f'(y)]_a^x$$

$$= f''(x) + \int_a^x K_{yy}(x, y) f(y) dy + [K(x, y) f'(y) - K_y(x, y) f(y)]_a^x$$

(in Gleichung einsetzen:)

□

$$\begin{aligned}
& - (K(x,x))' \varphi(x) - K(x,x) \varphi'(x) - K_x(x,x) \varphi(x) \\
& - \int_a^x K_{xx}(x,y) \varphi(y) dy + q_0(x) \varphi(x) + q_0(x) \cdot \int_a^x K(x,y) \varphi(y) dy = \\
& - \int_a^x K_{yy}(x,y) \varphi(y) dy - [K(x,y) \varphi'(y) - K_y(x,y) \varphi(y)]_a^x \\
& + q(x) \varphi(x) + \int_a^x K(x,y) q(y) \varphi(y) dy
\end{aligned}$$

⇔ Koeffizienten der Ausdrücke  $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi(y), \varphi'(a)$  müssen links und rechts identisch sein

$$\varphi(x): -K(x,x)' - K_x(x,x) - K_y(x,x) + q_0(x) - q(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2(K(x,x))' = q(x) - q_0(x) \Leftrightarrow$$

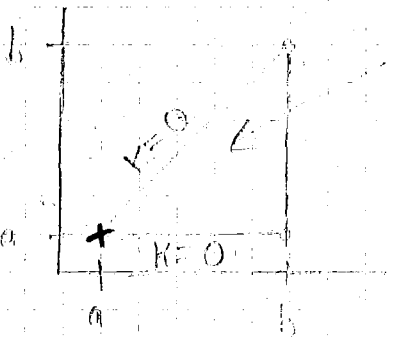
$$K(x,x) = c + \frac{1}{2} \cdot \int_a^x (q_0(t) - q(t)) dt \quad \begin{matrix} c=0 \text{ wg} \\ K(x,a)=0 \end{matrix}$$

$$\varphi'(x): \quad \checkmark$$

$$\varphi(y): -K_{xx}(x,y) + K_{yy}(x,y) + (q_0(x) - q(y)) K(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow K_{yy} - K_{xx} + (q_0(x) - q(y)) K = 0 \text{ im } \Omega$$

$$\varphi'(a): K(x,a) = 0$$



$$-K_{yy} - K_{xx} + (q_0(x) - q(y)) K = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_a^x (q_0(t) - q(t)) dt$$

x: einziger Pkt., wo nicht stetig diffbar

Gemischte Aufgabe für eine hyperbolische Gleichung.

Das Problem ist eindeutig lösbar nach Theorie part. Dgl.

$K \in C^2(\Omega)$ , weil keine Charakteristiken von  $(a,a)$

ins Innere von  $\Omega$  laufen.

/\* Charakteristiken laufen / und \ . \*/

Thomas Bierkes: „Das war ein wahnsinniges!“ □

Bemerkung:

$$K(x, x) \in C^1 [a, b]$$

$$q(x) - q_0(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

Bemerkung 2:

$L = I + \mathcal{K}$  Volterra'scher Integraloperator mit Kern  $K$

$$L\varphi(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

§ 4 Volterra'sche Integraloperatoren

$$L\varphi(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = (I + \mathcal{K})\varphi$$

Satz 4.1

$L$  sei ein Volterra'scher Integraloperator mit stetigem Kern. Dann ist  $L$  ein linearer stetiger Operator im dem normierten Raum  $C[a, b]$ .

$L$  ist invertierbar und  $L^{-1}$  ist ebenfalls ein Volterra'scher Integraloperator mit stetigem Kern.

Beweis:

$L$  linear, stetig  $\checkmark$

z.z.:  $L$  invertierbar, d.h.

$f - \mathcal{K}f = g$  eindeutig lösbar für  $g \in C[a, b]$

$$f - \mathcal{K}f = g \Leftrightarrow f = g + \mathcal{K}f \Leftrightarrow f = g + \mathcal{K}(g + \mathcal{K}f) \\ = g + \mathcal{K}g + \mathcal{K}^2 f \quad \text{usw}$$

$$f = g + \mathcal{K}g + \mathcal{K}^2 g + \dots + \mathcal{K}^{m-1} g + \mathcal{K}^m f$$

Zeige:  $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}^m g$  konvergiert in  $C[a, b]$  gleichmäßig

(später)

Raum ist  $f = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}^m g$ , denn

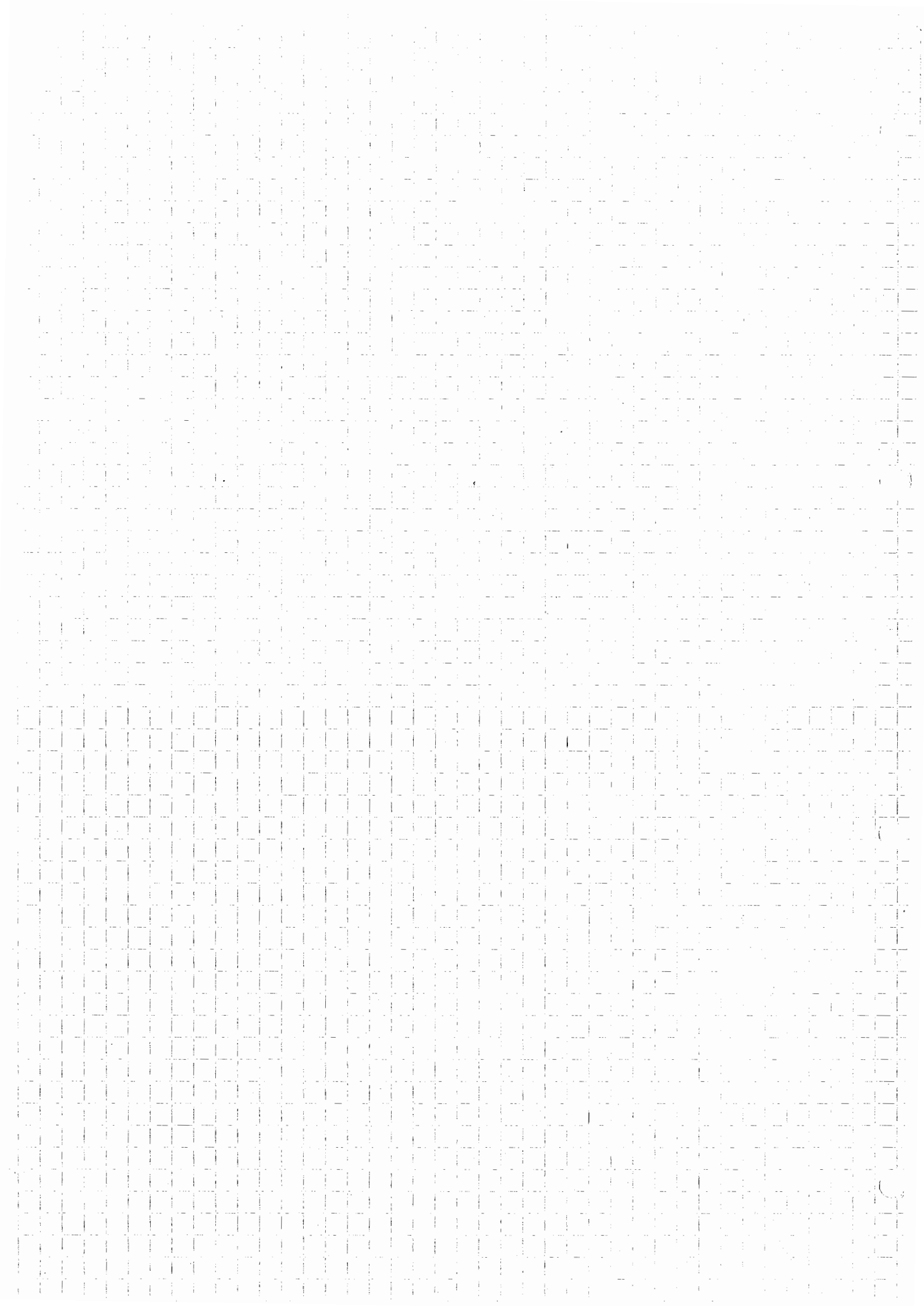


$$\mathcal{R}f = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}^{m+1} g = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}^m g = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}^m g - g$$

$$= f - g$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}f + g = f \quad \Rightarrow Lf = g$$

(2)



### § 5 Die Methode von Gelfand, Levitan, Marchenko

Inverses Eigenwertproblem: (Sturm-Liouville)

$$-u'' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots \quad u_0, u_1, \dots \text{ normiert: } \int_a^b u_k^2 dx = 1$$

Vorsichen frei:  $u_k'(a) > 0$

(ungleich sowieso, nur Vorsichen festgelegt)

Problem:

Geg.:  $\lambda_0, \lambda_1, \dots \quad u_0'(a), u_1'(a), \dots$

Ges.:  $q$  (= Potential)

$$T u = -u'' + q u \quad T_0 u = -u'' + q_0 u, \quad q_0 \text{ bekannt}$$

$\varphi(x, \lambda), \varphi_0(x, \lambda)$ :

$$\left. \begin{aligned} T \varphi &= \lambda \varphi, & \varphi(a) &= 0, & \varphi'(a) &= 1 \\ T_0 \varphi_0 &= \lambda \varphi_0, & \varphi_0(a) &= 0, & \varphi_0'(a) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{dadurch } \varphi, \varphi_0 \text{ sind best.}$$

#### Satz 5.1

Mit dem Transmutationsoperator  $L$  aus Satz 3.1 gilt:

$$\varphi_0 = L \varphi$$

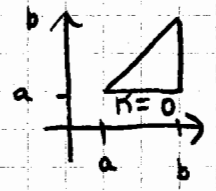
Beweis:

$$\psi_0 = L \varphi \quad \text{pc}^2 \quad L \varphi = \varphi(x, \lambda) + \int_a^x K(x, y) \varphi(y, \lambda) dy$$

$$T_0 \psi_0 = T_0 L \varphi \stackrel{\vee}{=} L T \varphi = \lambda L \varphi = \lambda \psi_0$$

$$\psi_0(a) = \varphi(a, \lambda) = 0$$

$$\psi_0'(a) = \varphi'(a, \lambda) + \underbrace{K(x, a) \varphi(a, \lambda)}_{=1} + \underbrace{\int_a^a \dots}_{=0} = 1$$



$\psi_0$  erf\u00fcllet die gleiche Bed. wie  $\varphi_0$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \psi_0 = L \varphi$$

### Satz 5.2

Sei  $q \in C^2[a, b]$ .

Dann ist das inverse Sturm-Liouville-Problem eindeutig lösbar. /\* Beweis konstruktiv \*/

Beweis:

$$\Phi, \Phi_0 : \ell^2 \rightarrow L_2(a, b)$$

$$\ell^2 = \left\{ c = \{c_k\}_{k=0,1,\dots} : \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty \right\}$$

$$\|c\| = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2}$$

$$(\Phi c)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underbrace{p(x, \lambda_k)}_{p_k u_k(x)}$$

$$(\Phi_0 c)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_0(x, \lambda_k)$$

$$p_k = \frac{1}{u_k'(a)} \text{ positiv}, \quad \cancel{u_k(x) = p_k \cdot p(x, \lambda_k)}$$

$$p_k u_k(x) = p(x, \lambda_k) \quad (\text{stimmen bei } a \text{ in Fkt u. Able. überein, deshalb identisch})$$

$$p_k^2 \int_a^b u_k^2(x) dx = \int_a^b p^2(x, \lambda_k) dx$$

$$p_k = \left( \int_a^b p^2(x, \lambda_k) dx \right)^{1/2}$$

$$\text{Satz 2.5} \Rightarrow p_k = O(\lambda_k^{-1/2}) = O(k^{-1})$$

$$\int_a^b |\Phi c|^2 dx = \sum c_k^2 p_k^2 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = C \cdot \|c\|^2$$

↑ beschränkt

$$\|\Phi\| \leq C < \infty \Rightarrow \Phi \text{ stetiger Operator}$$

$$\Phi_0 = L\Phi, \quad L \text{ stetig} \Rightarrow \Phi_0 \text{ beschränkt, da } L \text{ beschränkt}$$

Beschränkte Operatoren im  $\mathbb{R}$  zwischen Hilberträumen  $\Rightarrow$  adjungierte Operatoren  $\Phi^*, \Phi_0^* : L_2(a, b) \rightarrow \ell^2$

Satz 4.1:

$$L = I - \mathcal{J}$$

$$(\mathcal{J}f)(x) = \int_a^x K(x,y) f(y) dy, \quad K \text{ stetig}$$

Dann ist  $L$  invertierbar und  $L^{-1} = I + \mathcal{J}$ ,

$$(\mathcal{J}^2 f)(x) = \int_a^x H(x,y) f(y) dy, \quad H \text{ stetig}$$

z.z.:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{J}^m g \quad \text{Konvergiert. Dann ist } z = \sum_1^{\infty} \mathcal{J}^m$$

Wir zeigen induktiv:

$$(\mathcal{J}^m g)(x) = \int_a^x K_m(x,y) f(y) dy, \quad K_m \text{ stetig}$$

$$|K_m(x,y)| \leq M^a \frac{|x-y|^{m-1} M^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$M = \max_{0 \leq y \leq x \leq b} |K(x,y)|$$

$$m=1: K_1 = K \quad \checkmark$$

i.V.: Beh. für  $m \geq 1$  richtig.

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}^{m+1} g)(x) &= \int_a^x K(x,y) (\mathcal{J}^m g)(y) dy \\ &= \int_a^x K(x,y) \int_a^y K_m(y,z) g(z) dz dy \\ &= \int_a^x g(z) \underbrace{\int_z^x K(x,y) K_m(y,z) dy}_{K_{m+1}(x,z)} dz \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |K_{m+1}(x,z)| &\leq \int_z^x M M \frac{|x-y|^{m-1} M^{m-1}}{(m-1)!} dy \\ &= M \int_0^{x-z} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} dt = M \frac{|x-z|^m M^m}{m!} \end{aligned}$$

d.h. die Beh. für  $m+1$ .

Folgerung:

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, y) = H(x, y) \quad \text{mit gleichmäßiger (u. absolut) Konvergenz.}$$

/\* Vergleich mit der Reihe für  $e^{|x-y|/M}$ , welche absolut und gleichmäßig konvergiert \* /

□

Bemerkung:

1) Nomenklatur

$\mathcal{K}$  Volterra'scher Integraloperator, so heißt die Gleichung  $f + \mathcal{K}f = g$  Volterra'sche Integralgleichung 2. Art und die Gleichung  $\mathcal{K}f = g$  Volterra'sche Integralgleichung 1. Art

2)  $(Kf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$ :

Fredholm'scher Integraloperator mit Kern  $K$ .

Fredholm'sche Integralgleichungen 1. bzw. 2. Art wie unter 1).

Satz 4.2:

Die Fredholm'sche Gleichung 2. Art mit stetigem Kern ist eindeutig lösbar genau dann, wenn die zugehörige homogene Gleichung ( $g=0$ ) nur die Lösung  $f=0$  hat. (d.h.  $\mathcal{K}$  hat nicht den EW -1)

Beweis:

FA-Bücher

Vergleich mit Matrizen:

$$A(n, m) \quad A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\Phi c, f)_{L_2(a, b)} = (c, \Phi^* f)_{\mathbb{R}^2}$$

Durch die Beziehung ist  $\Phi^*$  definiert.

$$(\Phi c, f) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k), f \right)_{L_2(a, b)} \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\Phi^* f)_k$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varphi(x, \lambda_k), f)_{L_2(a, b)}$$

für alle  
Folgen  $c_k$  identisch

$$\Rightarrow (\Phi^* f)_k = (\varphi(x, \lambda_k), f)_{L_2(a, b)} = \int_a^b \varphi(x, \lambda_k) f(x) dx$$

$$(\Phi_0^* f)_k = \int_a^b \varphi_0(x, \lambda_k) f(x) dx$$

$$P = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & & \\ & & \varphi_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ unendliche Matrix}$$

$$\Phi P^{-2} \Phi^*: L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$$

ist Identität

$$\Phi P^{-2} \Phi^* f = \Phi P^{-2} (\varphi(x, \lambda_k), f)_{k=0}^{\infty} =$$

$$= \Phi (P_k^{-2} (\varphi(x, \lambda_k), f)_{k=0}^{\infty}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{-2} (\varphi(x, \lambda_k), f) \varphi(x, \lambda_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k, f) u_k(x) = f(x)$$

$\{u_k\}$  bilden vollständiges Orthonormalsystem

$$\Phi P^{-2} \Phi^* = I$$

$\Phi = L^{-1} \Phi_0$  einsetzen  $\Rightarrow$

$$L^{-1} \Phi_0 P^{-2} \Phi_0^* (L^*)^{-1} = I \quad (\text{gleiche Regeln wie bei Matrizen})$$

$$\underbrace{\Phi_0 P^{-2} \Phi_0^*}_{\text{bekannt}} = LL^* \quad (*)$$

$L$  ist Volterra'scher Operator 2. Art

$$\text{d.R. } (L\varphi)(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,y) \varphi(y) dy$$

$L$  eindeutig bestimmt durch  $(*)$ ?



## Satz 5.2

$$q \in C^2[a, b] \Rightarrow$$

$q$  eindeutig bestimmt durch  $\lambda_k, u_k(a), k=1, 2, \dots$

Beweis (Fortsetzung!)

$$\Phi, \Phi_0 : \mathcal{L}^2 \rightarrow L_2(a, b)$$

$$(\Phi c)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p(x, \lambda_k)$$

$$(\Phi_0 c)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_0(x, \lambda_k)$$

$$\Phi_0 = L \cdot \Phi, \quad L = I + \mathcal{K}$$

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

$$\Phi_0 P^{-2} \Phi_0^* = L \cdot L^*$$

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & & \\ & p_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad p_k = \frac{1}{u_k'(a)}$$

„Das war der Stand am Ende der letzten Stunde.“

$$\mathcal{G} := \Phi_0 P^{-2} \Phi_0^* - I$$

$I$ : Identität

$$(\mathcal{G}f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_0(x, \lambda_k)}{p_k} \frac{\int_a^b f(y) \cdot p_0(y, \lambda_k) dy}{p_k}$$

$\lambda_k, u_k$  EW, EF  $\mathcal{R}_{\text{onv}}$  von  $Tu = -u'' + qu$ ,  $p_k = \frac{1}{u_k'(a)}$

$\lambda_{0k}, u_{0k}$  EW, EF von  $T_0 u = -u'' + q_0 u$

$$p_{0k} = \frac{1}{u_{0k}'(a)}$$

$$p_0(x, \lambda_{0k}) = p_{0k} u_{0k}(x)$$

$$u_{0k} = \frac{p_0(x, \lambda_{0k})}{p_{0k}}$$

orthonormierte Eigenfkt von  $T_0$

Entwicklungssatz:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_{0k}) u_{0k}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_0(x, \lambda_{0k})}{\rho_{0k}} \int_a^b f(y) \frac{\varphi_0(y, \lambda_{0k})}{\rho_{0k}} dy \quad \text{in } L_2(a, b)$$

$$\Rightarrow (g, f)(x) = \int_a^b f(y) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varphi_0(x, \lambda_k) \varphi_0(y, \lambda_k)}{\rho_k^2} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_{0k}) \varphi_0(y, \lambda_{0k})}{\rho_{0k}^2} \right)}_{G(x, y)} dy$$

Rechnung gerechtfertigt, falls die Reihe für  $G$  im Sinne von  $L_2$  konvergiert.

$$q_0(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lambda_k - (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 \right)$$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q dx + O(k^2)$$

nach früherem Satz.

nach Satz 2.4

$$\lambda_{0k} = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q dx$$

Falls  $q_0$  so gewählt.

$$\approx \lambda_k - \lambda_{0k} = O(k^{-2})$$

$$\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{0k}} = O(k^{-3})$$

Satz 2.5  $\Rightarrow$

$$u_k'(a) = \lambda_k^{1/2} \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \quad \rho_k = \lambda_k^{-1/2} \left[ \sqrt{\frac{b-a}{2}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

Satz 2.5 =>

$$\left( u_n'(a) = \lambda_n^{1/2} \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \rho_n = \lambda_n^{-1/2} \left( \sqrt{\frac{b-a}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right)$$

$$\lambda_n \rho_n^2 = \frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lambda_{0n} \rho_{0n}^2 = \frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_{0n}'(a) = \lambda_{0n}^{1/2} \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \dots$$

$$\varphi_0(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$\left( \begin{array}{l} a=0 \text{ gesetzt} \\ \text{OBdW} \int_a^b q(x) dx = 0 \text{ gesetzt} \end{array} \right)$$

$$-\varphi_0'' = \lambda \varphi_0$$

$$\varphi_0(a, \lambda) = 0 \quad \varphi_0'(0, \lambda) = 0$$

$$\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(y, \lambda_n)}{\rho_n^2} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_{0n}) \varphi_0(y, \lambda_{0n})}{\rho_{0n}^2} =$$

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_n} y}{\frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{\sin \sqrt{\lambda_{0n}} x \sin \sqrt{\lambda_{0n}} y}{\frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} \stackrel{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_{0n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{=} =$$

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda_{0n}} x \sin \sqrt{\lambda_{0n}} y}{\frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{\sin \sqrt{\lambda_{0n}} x \sin \sqrt{\lambda_{0n}} y}{\frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$\left( \frac{1}{\frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{\frac{b-a}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} \right) \sin \sqrt{\lambda_{0n}} x \sin \sqrt{\lambda_{0n}} y + O\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{C_n}{n} \quad C_n \text{ konst, } |C_n| \leq C$$

$$\frac{C_n}{n} \cdot \sin \sqrt{\lambda_{0n}} x \sin \sqrt{\lambda_{0n}} y + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

^ Fkt von x und y

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \dots \dots \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} \sin \sqrt{\lambda_{0k}} x \sin \sqrt{\lambda_{0k}} y + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Konv. nach Dirichlet gleichm. und absolut.  
 (jede Reihe mit  $\sum \frac{1}{k^d}$ ,  $d > 1$ )

$O\left(\frac{1}{k^3}\right)$  stetige Fkt.

- ergibt stetige Funktionen

$$\int_a^b \int_a^b \left( \sum_{k=1}^m c_k \sin \sqrt{\lambda_{0k}} x \sin \sqrt{\lambda_{0k}} y \right)^2 dx dy =$$

$$\sum_{e, k=1}^m \frac{c_k c_e}{k e} \underbrace{\int_a^b \sin \sqrt{\lambda_{0k}} x \sin \sqrt{\lambda_{0e}} x dx}_{=0 \text{ falls } k \neq e} \cdot \underbrace{\int_a^b \sin \sqrt{\lambda_{0k}} y \sin \sqrt{\lambda_{0e}} y dy}_{=0 \text{ falls } k \neq e}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{c_k^2}{k^2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Konv. wg  $k^2$  im Nenner

Konvergenz für  $m \rightarrow \infty$

Jetzt gezeigt, daß die Reihe vorher konvergierte.

$$I + \mathcal{G} = L \cdot L^* = (I + \mathcal{R})(I + \mathcal{R}^*)$$

$$(I + \mathcal{R})^{-1} = I + \mathcal{Z}$$

$\mathcal{Z}$  wieder Volterra'scher Integraloperator mit stetigem Kern  $H$

$$\Rightarrow (I + \mathcal{Z})(I + \mathcal{G}) = I + \mathcal{R}^*$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}I + I\mathcal{G} + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{R}^*$$

$$\mathcal{Z}f(x) = \int_a^x f(x, y) f(y) dy$$

$$H(x, y) + G(x, y) + \int_a^b H(x, z) G(z, y) dz$$

$$\Rightarrow H(x, y) + G(x, y) + \int_a^x H(x, z) G(z, y) dz = K(y, x)$$

Kern von  $\mathcal{R}^*$ :  $\mathcal{R}^*(x, y) = K(y, x)$

Für  $y \leq x$ :  $K(y, x) = 0$

wie  $K(x, y) = 0$  für  $y \geq x$

$G$  ist bekannt  $\Rightarrow$

habe Integralgleichung für  $H$ .

Für jedes  $x$  haben wir eine Fredholm'sche Integralgleichung 2. Art für  $R_x(z) = H(x, z)$

$$R_x(y) + \int_a^x R_x(z) G(z, y) dz = -G(x, y) \quad a \leq y \leq x$$

Ziel: Auflösung der Gleichung nach  $R_x \quad \forall x \in [a, b]$

z.z.:

$$R(y) + \int_a^x R(z) G(z, y) dz = 0 \quad a \leq y \leq x$$

hat nur die Lösung  $R = 0$ .

Setze  $G$  ein:

Sei  $R$  solche Lösung.

$$R(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{p_0(y, \lambda_k)}{p_k} \int_a^x \frac{R(z) p_0(z, \lambda_k)}{p_k} dz \right\} -$$

$$\left. \frac{p_0(y, \lambda_{0,n})}{p_{0,n}} \int_a^x \frac{R(z) p_0(z, \lambda_{0,n})}{p_{0,n}} dz \right\} \cdot R(y)$$

$$\Rightarrow R(a) = 0$$

$$\int_a^x R^2(y) dy + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_a^x R(z) \frac{\varphi_0(z, \lambda_k)}{\rho_k} dz \right)^2 = \left( \int_a^x R(z) \underbrace{\frac{\varphi_0(z, \lambda_{0k})}{\rho_{0k}}}_{u_{0k}} dz \right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_a^x R(z) \frac{\varphi_0(z, \lambda_k)}{\rho_k} dz \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^x R(z) \varphi_0(z, \lambda_k) dz = 0 \quad \forall k$$

$$\varphi_0(z, \lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin \sqrt{\lambda_k} \cdot (x-a)$$

$$R(a) = 0$$

$$R(a) = 0$$

Zusammen  $\Rightarrow R \equiv 0$  (nochmal 20 Minuten etwa...)  
für  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$   $h$  eindeutig bestimmt

$\Rightarrow$   $K$  eindeutig bestimmt

$\Rightarrow$   $q(x) = 2 \frac{d}{dx} u(x, x) + q_0(x)$  eindeutig bestimmt.

Wärmerike ginge den Proofs nicht durch.

$$b_0 p^{-2} \phi_0^x = LL^*$$

$\uparrow$  finde Matrix als Approximation  
 $\Rightarrow$  Cholesky

$$= (R_x, u_{0k})$$

$$R_x(z) = \begin{cases} R(z) & z \leq x \\ 0 & z > x \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (R_x, u_{0k})^2$$

$$= (R_x, R_x)$$

wg  $u_{0k}$  vollständiges

Orthonomalsystem

$$= \int_a^x R^2 dy$$

Bem.:

④

① Beweis konstruktiv

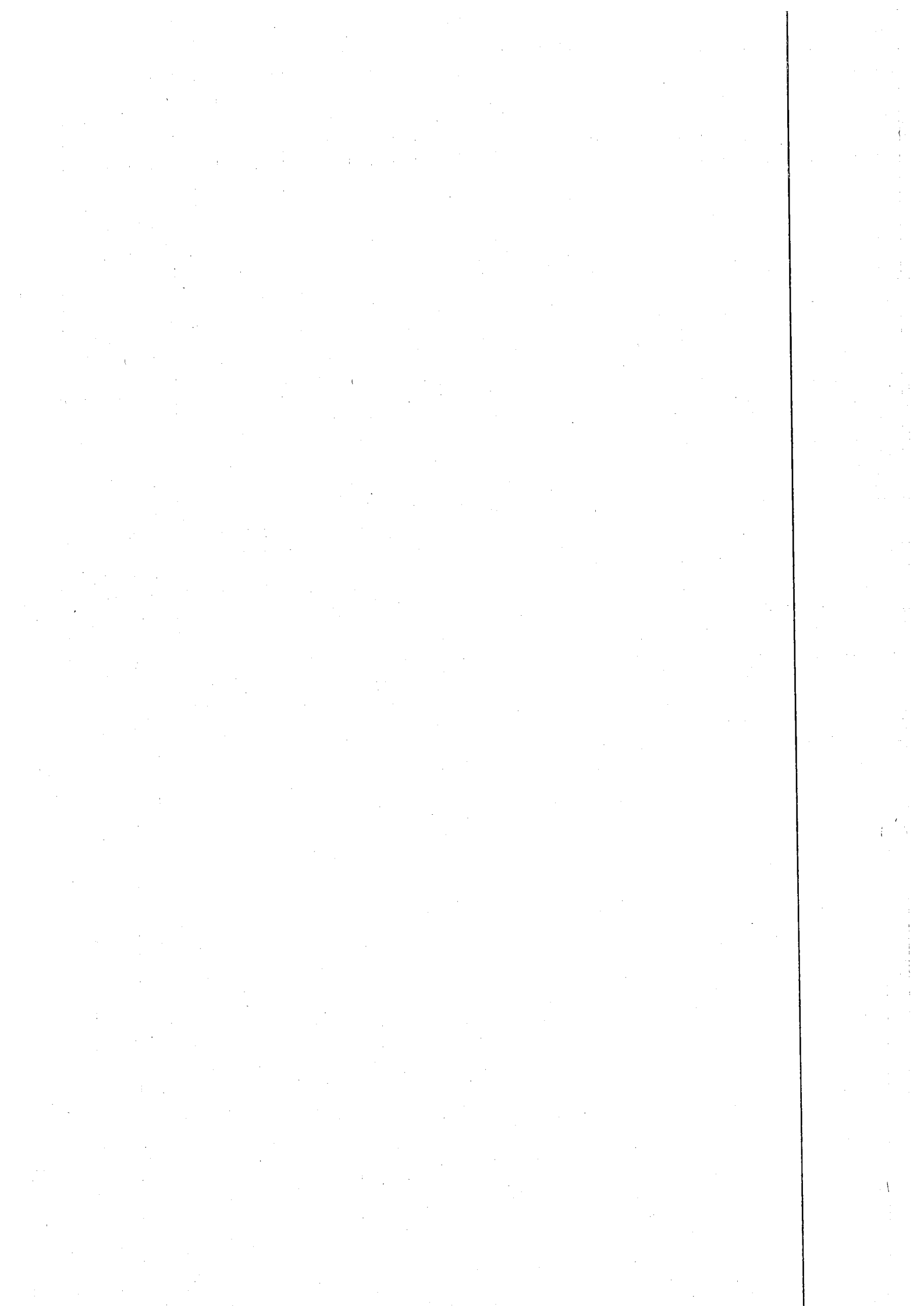
i) Bestimme  $G$  (problematisch)

ii) Löse  $H(x, y) + \int_a^x H(x, z) G(z, y) dz =$   
Fredholm'sche 2. Art  
 $- G(x, y) \quad a \leq y \leq x \leq b$

Integralgleichung von Marchenko

iii) Bestimme  $q$  aus

$$q_0(x) = 2 \frac{d}{dx} H(x, x) + q(x)$$





Gehe aus von  $p_i^\circ(\lambda)$  vom Grade  $i-1$  :

$$\beta_{i-1}^\circ \varphi_{i-1}^\circ + d_i^\circ \varphi_i^\circ + \beta_i^\circ \varphi_{i+1}^\circ = \lambda \varphi_i^\circ \quad i=1, \dots, m; \quad \varphi_0^\circ = 0; \quad \varphi_{m+1}^\circ = 1$$

$$p_i(\lambda) = \sum_{j=1}^i \varphi_j^\circ(\lambda) \cdot k_{ij} \quad \text{oder} \quad p_i^\circ(\lambda) = \sum_{j=1}^i \ell_{ij} \varphi_j(\lambda)$$

$\ell_{ij}, k_{ij}$  unabhängig von  $\lambda$  !

$$p^\circ(\lambda) = (\varphi_1^\circ(\lambda), \dots, \varphi_n^\circ(\lambda))^t \quad L = (\ell_{ij}) = \begin{matrix} \square & 0 \\ \text{---} & \\ \text{---} & \\ \text{---} & \end{matrix}$$

$$p(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))^t$$

$$p^\circ(\lambda) = L p(\lambda) \quad (\text{Bezeichnung wie in Gel'fand-Levidan})$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} d_1^\circ & \beta_1^\circ & & \\ \beta_1^\circ & & & \\ & & \beta_{n-1}^\circ & \\ & & \beta_{n-1}^\circ & d_n^\circ \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & & & \\ & & \beta_{n-1} & \\ & & \beta_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E T_0 p_0(\lambda) = \lambda E p_0(\lambda) \quad , \quad E T p(\lambda) = \lambda E p(\lambda)$$

$$E L E = E L \quad \text{wg} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & 0 \\ \text{---} & \\ \text{---} & \\ \text{---} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot L$$

$$\square \Rightarrow E T_0 L p = \lambda E L p = \lambda E L E p = E L E \lambda p = E L E T p = E L T p \quad \forall \lambda \quad , \quad p = p(\lambda)$$

$$\Rightarrow E T_0 L = E L T \quad , \quad \text{d.R.}$$

L Transmutation für  $T_0$  und  $T$

Anwendung auf

$$-u'' + q u = \lambda u \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots \text{ geg.}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \quad u_0'(a), u_1'(a), \dots, \text{ geg.}$$

Gesucht :  $q$

$$x_i = a + iR \quad , \quad R = \frac{b-a}{m+1} \quad , \quad i = 0, \dots, m+1$$

$$x_i \approx \frac{u_{i+1}^R - 2u_i^R + u_{i-1}^R}{R^2} + q(x_i) u_i^R = \lambda u_i^R \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_0 = u_{m+1} = 0$$

$$u_k'(a) = \frac{u_1^k - u_0^k}{R} \quad , \quad \text{d.R.} \quad u_k^R = u_k'(a)$$

Gelfand Levin: (diskret)

Potential  $q_0$ ,  $\frac{\varphi_{i+1}^\circ(\lambda) - 2\varphi_i^\circ(\lambda) + \varphi_{i-1}^\circ(\lambda)}{h^2} + q_0(x_i)\varphi_i^\circ(\lambda) = \lambda \varphi_i^\circ(\lambda)$   
 $\varphi_0^\circ(\lambda) = 0$      $\varphi_1^\circ(\lambda) = 1$

$\varphi_i$  entsprechend, nur statt  $q_0$  jetzt  $q$

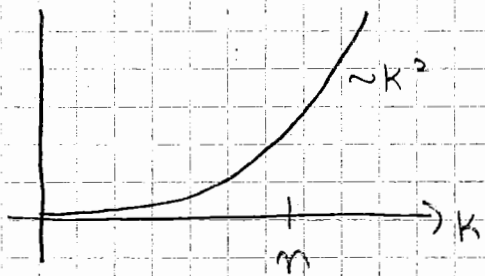
$\varphi_i^\circ(\lambda) = \varphi_i(\lambda) + \sum_{j=1}^{i-1} e_{ij} \varphi_j(\lambda)$     wg. Störkoeff. gleich

Behr.  $h \rightarrow 0$ :  $-\varphi_0'' + q_0 \varphi_0 = \lambda \varphi_0$

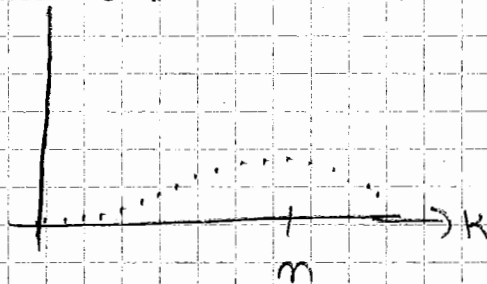
$-\varphi'' + q \varphi = \lambda \varphi$

$\varphi^\circ(\lambda, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_a^x L(x, y) \varphi(y) dy$   
a     $\uparrow$  "irgendeine Fkt"

EW kontinuierliches Problem:



EW des diskreten Problems



Ende Gelfand-Levin

## § 6

Historisches: Lanczos, Gelfand-Levitan, orthog. Polynome

$$T u = \lambda u \quad T = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & d_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \quad \beta_i > 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \underbrace{u_1^1, \dots, u_1^n}_{1. \text{ Rump der normierten Eigenvektoren}}$  bekannt, gesucht  $d_i, \beta_i$

Zitat: „Man hat weniger Respekt vor dem großen Mathematiker, wenn er sich erst alles ganz genau überlegt und feststellt: sein Bruch ist alles Feinsie!“

$$\beta_{i-1} u_{i-1}^k + d_i u_i^k + \beta_i u_{i+1}^k = \lambda_k u_i^k \quad i=1, \dots, n$$

$$u_0 = u_{n+1} = 0$$

(orth.  $\Rightarrow$ )  $u^T$  orth.

$$\text{Wir wissen: } \sum_{i=1}^n u_i^k u_i^e = \delta_{ke} \quad \sum_{k=1}^n u_i^k u_j^k = \delta_{ij}$$

„Diese schlichte Bern. löst das ganze Problem.“

Lösung des inversen Problems:

$$d_1 u_1^k + \beta_1 u_2^k = \lambda_k u_1^k \quad | \cdot u_1^k, \sum_{k=1}^n$$

$$d_1 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n (u_1^k)^2}_{=1} + \beta_1 \underbrace{\sum_{k=1}^n u_2^k u_1^k}_{=0} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k (u_1^k)^2}_{\text{bekannt}}$$

$$\Rightarrow d_1 = \sum_{k=1}^n \lambda_k (u_1^k)^2$$

$$\beta_1 u_2^k = (\lambda_k - d_1) u_1^k \Rightarrow \beta_1^2 = (\lambda_k - d_1)^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n (u_1^k)^2}_{=1}$$

$$u_2^k = (\lambda_k - d_1) u_1^k / \beta_1$$

$$\beta_1 u_1^k + d_2 u_2^k + \beta_2 u_3^k = \lambda_k u_2^k \quad | u_2^k, \sum_{k=1}^n$$

$$\Rightarrow d_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k (u_2^k)^2$$

$$\beta_2 u_3^k = (\lambda_k - d_2) u_2^k - \beta_1 u_1^k,$$

$$\beta_2^2 = \sum_{k=1}^n ((\lambda_k - d_2) u_2^k - \beta_1 u_1^k)^2$$

$$u_3^k = (\dots) / \beta_2 \quad (\text{Lanczos-Verf.})$$

(Das geht so, wenn man schon weiß, daß es geht)

# Beziehung zu orthogonalen Polynomen

$$\beta_{i-1} \gamma_{i-1} + d_i \gamma_i + \beta_i \gamma_{i+1} = \lambda \gamma_i \quad (*)$$

$$\gamma_0 = 0 \quad \gamma_1 = 1$$

$\gamma_i$  sind Polynome vom Grade  $i-1$  in  $\lambda$ .

$(\gamma_1(\lambda_k), \dots, \gamma_n(\lambda_k)) \in$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_k$ .

$$\gamma_i(\lambda_k) = p_k u_i^k \quad \text{Für } i=1: p_k = \frac{1}{u_i^k} \text{ bekannt.}$$

$$\sum_{k=1}^m u_i^k u_j^k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k^2} \gamma_i(\lambda_k) \gamma_j(\lambda_k) \quad \text{d.B.}$$

$$= \delta_{ij} \quad \gamma_i \text{ orthogonal bezüglich } (\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^m \frac{\varphi(\lambda_k) \psi(\lambda_k)}{p_k^2}$$

inneres Produkt im Raum der Polynome

Erzeugung der  $\gamma_i$ :

Gehen aus von  $1, \lambda, \dots, \lambda^{m-1}$  und definieren

$$\gamma_i = c_{ii} \lambda^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \gamma_j$$

Bestimme die  $c_{ij}$  nach E. Schmidt

Einfacher:

$$\gamma_i = c_{ii} \lambda \gamma_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \gamma_j \quad (\text{andere Summe}) \quad | \cdot \gamma_{i-1} | \cdot \gamma_{i-2}$$

$$0 = c_{ii} (\lambda \gamma_{i-1}, \gamma_{i-1}) + c_{i,i-1}$$

$$0 = c_{ii} (\lambda \gamma_{i-1}(\lambda), \gamma_{i-2}(\lambda)) + c_{i,i-2}$$

$$\gamma_i = c_{ii} \lambda \gamma_{i-1} + c_{i,i-1} \gamma_{i-1} + c_{i,i-2} \gamma_{i-2}$$

identisch zu (\*)

Wieso sind die Koeffizienten  $d$  und  $\beta$  bestimmt?

Geländ hat das auf Dgl 5 übertragen.

$c_{ij} = 0$  für  $j < i-2$   
 $c_{ij}$  dann =  $-c_{ij} (\lambda \gamma_{i-1}, \gamma_j)$   
 $= (\gamma_{i-1}, \lambda \gamma_j) = 0$  wg  $\text{grad } \lambda \gamma_j < i-1$

## Teil III Integralgeometrie

/\* Bereitstellung von Zielfunktionen \*/

Ziele der Integralgeometrie (nach Gelfand):

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Familie  $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  von Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^m$ 

$$\text{Behr } \int_{M_\lambda} f(x) dx =: (Rf)(\lambda) \quad \lambda \in \Lambda$$

Problem:  $M_\lambda$  Invertiere  $R$  (Radon-Transformation)("geg  $Rf(\lambda) \forall \lambda$ , ges.  $f$ ")Vortrag: Quinto, Boston Mi 17<sup>15</sup> M5

Beispiele:

- 1)  $M_\lambda$  Hyperebenen: Tomographie, MRI
- 2)  $n=2$ ,  $M_\lambda$  Kreise entlang  $x$ -Achse mit bel. Radius: SAR
- 3)  $n=2$ ,  $M_\lambda$  Kreise, welche dem Einheitskreis orthogonal schneiden: Impedanz-Tomographie

## §1 Integraltransformationen

## 1. Die Fourier-Transformation

$$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

 $\hat{f}$  ist die Fourier-Transformation von  $f$ .

Eigenschaften:

$$\text{" } f \in L_1 \Leftrightarrow \hat{f} \in L_1 \text{"}$$

$$\mathcal{S} = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |x^\alpha D^\alpha f(x)| \text{ beschränkt in } \mathbb{R}^n \}$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad d_i \in \mathbb{Z}$$

$$D^d = \frac{\partial^{d_1}}{\partial x_1^{d_1}} \cdots \frac{\partial^{d_n}}{\partial x_n^{d_n}}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$$

z.B.  $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$  (Schwartz'scher Raum)

①  $\wedge : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

② Faltungssatz:  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$   
 $f, g \in \mathcal{S}$

Dann:  $(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$

③ Inversionsformel:

$$\tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} f(x) dx$$

Dann  $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\tilde{f}} = f \quad \forall f \in \mathcal{S}$

④ Parseval:  $\int f \hat{g} dx = \int \hat{f} g dx \quad \forall f, g \in \mathcal{S}$

Folgerung aus ④:

$$f = \hat{\hat{g}} \Rightarrow \int |\hat{g}|^2 dx = \int |g|^2 dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{wg } \hat{\hat{f}} = \tilde{\tilde{f}} \\ \Rightarrow \hat{f} = \hat{\hat{\hat{g}}} = \tilde{\tilde{\tilde{g}}} = \tilde{g} \end{array} \right. \quad (\text{sieht man direkt})$$

$$\|\hat{g}\| = \|g\| \quad \text{für } \|g\| = \left( \int |g|^2 dx \right)^{1/2}$$

d.h. die Fourier-Transform und inverse Fourier-Transform sind Isometrien des  $L_2(\mathbb{R}^n)$

Erweitere Fourier-Transform auf  $L_2(\mathbb{R}^n)$

$$f \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } |x| < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{f}_N(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x| < N} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

$$f_N \rightarrow f \quad \text{in } L_2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$$

$$\hat{f}_N \text{ konvergent in } L_2(\mathbb{R}^n)$$

Definiere  $\hat{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N$

Schreibweise:  $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x| < N} e^{-ix\xi} f(x) dx$

ex. nicht immer  
manche schreiben l. i. m.

## 2. Mellin-Transformation

$$[0, \infty] \quad , \quad f \in C([0, \infty])$$

$$(Mf)(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} \cdot f(y) dy \quad \text{Mellin-Trafo}$$

/ \* i. W. keine Aussage über Existenz \* /

$a < \operatorname{Re} x < b$     sodaß Existenz geg.

Beispiele:

$$1) \quad f(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (Mf)(x) = \int_0^1 y^{x-1} \cdot 1 dy$$

$$= \frac{1}{x} \cdot y^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x} \quad \text{falls } a > 0$$

$$\text{weg } \int^x y^a dy = \frac{1}{a+1} y^{a+1}$$

$$2) \quad (M \cos)(x) = \Gamma(x) \cos \frac{\pi x}{2} \quad , \quad \sigma < \operatorname{Re} x < 1$$

Eigenschaften:

$$(M f')(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} f'(y) dy \stackrel{\text{part integr}}{=} - \int_0^{\infty} (y^{x-1})' \cdot f(y) dy + \left[ y^{x-1} \cdot f(y) \right]_0^{\infty} =$$

$$- (x-1) \int_0^{\infty} y^{x-2} f(y) dy =$$

falls  $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$  schneller als jede

Potenz von  $x$  und  $a \geq 1$

$$= - (x-1) (Mf)(x-1)$$

/ \* Beachte Verschiebung des Arguments: \*

dgl  $\Rightarrow$  Differenzengleich. \* /

$$M(YF) = (MF)(x+1), \quad \operatorname{Re} x > -1$$

Inversionsformel:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^{-x} (MF)(x) dx \quad y > 0$$

Faltungssatz:

$$(f * g)(x) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \frac{dy}{y}$$

← MF analytisch,  
 $MF(z) \rightarrow 0$  glm  
 mit  $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$

$$M(f * g) = MF \cdot Mg$$

### 3) Fourier-Transform auf Abel'schen Gruppen

$G$  Gruppe, multiplikativ geschrieben, abelsch

Charakter  $\chi$  von  $G$ :  $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$  sodass

$$\chi(xy) = \chi(x) \cdot \chi(y) \quad \forall x, y \in G$$

Haar'sches Maß  $\mu$  auf  $G$ : invariantes Maß

$$\text{auf } G, \text{ d. B. } \int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(yx) d\mu(x)$$

Fourier-Transform:

$\hat{G}$  = Menge der Charaktere von  $G$   
 (duale Gruppe)

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(y) \chi(y) d\mu(y)$$

Faltung:

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y) d\mu(y)$$

$$(f * g)^{\wedge}(\chi) = \int_G \chi(x) \cdot \underbrace{\int_G f(xy^{-1}) g(y) d\mu(y)}_{(f * g)(x)} d\mu(x)$$

$$= \int_G g(y) \underbrace{\int_G f(xy^{-1}) \chi(x) d\mu(x)}_{x \cdot y^{-1} = z}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_G g(y) \int_G f(x) \chi(xy) d\mu(x) d\mu(y) \\
&\quad \text{wg. Ma\ss invariant} \\
&\quad \chi(x \cdot y) = \chi(x) \chi(y) \\
&= \int_G g(y) \chi(y) d\mu(y) \int_G f(x) \chi(x) d\mu(x) = \\
&= \hat{g}(\chi) \cdot \hat{f}(\chi) \quad (\text{Faltungssatz allg.})
\end{aligned}$$

Beispiele:

i)  $G = (\mathbb{R}^n, +)$   $\chi(x) = e^{-ix^\top} = \chi_{\xi}(x)$

$$\hat{f}(\chi_{\xi}) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix^\top} f(x) dx$$

„identifiziere  $\xi \leftrightarrow \chi_{\xi}$ “

$\mu(x)$  = Lebesgue'sches Ma\ss

invariant:  $\int f(x+y) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$

Faltung:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

ii)  $G = (\mathbb{R}_+, \cdot)$   $\chi(y) = y^x = \chi_x(y)$   $\chi(y_1 \cdot y_2) = (y_1 \cdot y_2)^x = y_1^x \cdot y_2^x$

invariantes Ma\ss:  $d\mu(x) = \frac{dx}{x}$

$$\int_0^{\infty} f(xy) d\mu(x) = \int_0^{\infty} f(x \cdot y) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(z) \frac{dz}{z} \quad \uparrow x \cdot y = z$$

$$\int_0^{\infty} f(z) \frac{dz}{z} = \int_0^{\infty} f(z) d\mu(z) \quad \nu.$$

$$\hat{f}(\chi_x) = \hat{f}(x) = \int_0^{\infty} y^x f(y) \frac{dy}{y} = \int_0^{\infty} y^{x-1} f(y) dy$$

$= (Mf)(x)$  Fourier - Trafo

identifiziert:  $\chi_x \leftrightarrow x$

Faltung:

$$(f * g)(x) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \frac{dy}{y}$$

Bemerkung:

$$(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$$

$$x \rightarrow e^x$$

$$x+y \mapsto e^x \cdot e^y$$

Laplace-Transform 4)

$$(\mathcal{L}f)(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(y) dy \quad \operatorname{Re} x > x_0 = \text{Konvergenzabszisse}$$

Beispiele:

$$1) (\mathcal{L}1)(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{1}{x}$$

$$2) (\mathcal{L} \sin)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Eigenschaften:

$$(\mathcal{L}f')(x) = \dots = x \cdot (\mathcal{L}f)(x) - f(0) \quad \text{falls}$$

$f(z) \rightarrow 0$  mit  $z \rightarrow \infty$  hinreichend schnell.

Faltung:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y) g(y) dy$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Inversionsformel:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\mathcal{L}f)(x) e^{xy} dx$$

Literatur:

Sneddon: The use of integral transforms

## §2 Die Radon-Transformation

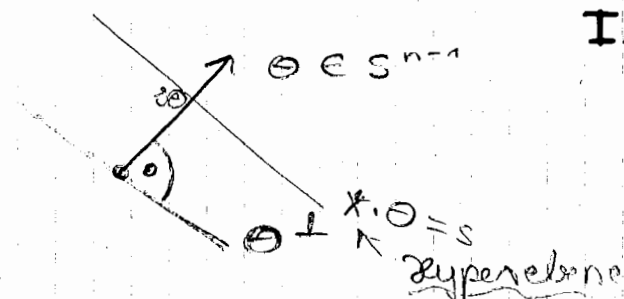
① 4.6.92

I.V.

$$f \in \mathcal{S}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|=1\}$$

$$\begin{aligned} (Rf)(\theta, s) &= \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx \\ &= \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy \end{aligned}$$



### Satz 2.1

$f \in \mathcal{S}$ . /\* Fourier-Transf. bzgl. 2'ter Variablen & \*/

$$\hat{f}(\delta\theta) = c (Rf)^\wedge(\theta, \delta) \leftarrow \text{1-dimensional}$$

$\uparrow$   $m$ -dim Fourier-Transf.

$c$  Konstante

Beweis:

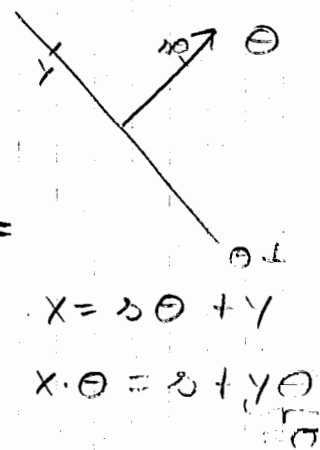
$$(Rf)^\wedge(\theta, \delta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} (Rf)(\theta, s) e^{-is\delta} ds =$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} \underbrace{f(s\theta + y)}_{=: x} dy e^{-is\delta} ds =$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\theta\delta} dx =$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\theta\delta} dx =$$

$\hat{f}(\delta\theta)$   $\uparrow$  " $m$ -dim Fourier-Transf."



$$x = s\theta + y$$

$$x \cdot \theta = s + y \cdot \theta$$

$$\underbrace{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}_{=c} \hat{f}(\delta \cdot \theta)$$

/\* Radon-Transf. eng mit Fourier-Transf. verwandt \*/

Satz 2.2

$f, g \in \mathcal{S}$

$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$  "Faltung im Sinne Fourier"

$(\mathcal{R}f * \mathcal{R}g)(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{R}f(\theta, s-t) \mathcal{R}g(\theta, t) dt$   
 1-dim. bzgl.  $\mathbb{R}^n$

2'tem Argument!

$\Rightarrow \mathcal{R}(f * g) = \mathcal{R}f * \mathcal{R}g$   
 ← 1-dim. Faltung  
 \* reduziert Dimension von  $n$  auf  $n-1$   
 $\in \mathcal{S}, n$ -dim. Faltung

Beweis:

$(\mathcal{R}(f * g))(\theta, s) =$

$\int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}^n} f(s\theta + \gamma - z) g(z) dz d\gamma$

$z = t\theta + v, t \in \mathbb{R}^1, v \in \theta^\perp$

↑ "alle Fkt. des  $\mathbb{R}^n$  so darstellbar"

$dz = dt dv$

"orthogonale Koordinatentransf.,"

$= \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + \gamma - t\theta - v) g(t\theta + v) dt dv d\gamma$   
 ↑ glatte Fkt.      ↑ glatte Fkt.       $dt dv$

$= \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} \int_{\theta^\perp} f((s-t)\theta + \gamma) g(t\theta + v) dt dv d\gamma$   
 ← "doch!"       $dv dt$

\* Verschiebung innerhalb  $\theta^\perp$  erreicht mittels  $\gamma - v$  oder  $\gamma + v$

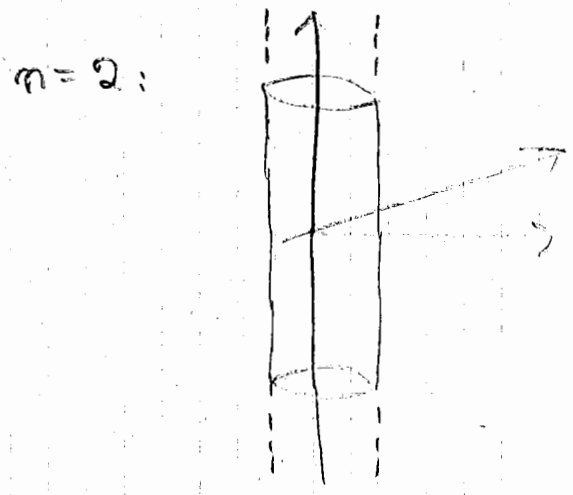
$= \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} f((s-t)\theta + \gamma) d\gamma \int_{\theta^\perp} g(t\theta + v) dv dt$

$= \int_{\mathbb{R}^1} (\mathcal{R}f)(\theta, s-t) (\mathcal{R}g)(\theta, t) dt$

$= (\mathcal{R}f * \mathcal{R}g)(\theta, s)$

Satz 2.3 :

$R: L_2(|x| < 1) \rightarrow L_2(\mathbb{Z}^n, (1-s^2)^{\frac{1-n}{2}})$  stetig  
 wobei  $\mathbb{Z}^n = \{(\theta, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : \theta \in S^{n-1}, s \in \mathbb{R}\}$  Gewichtsfkt



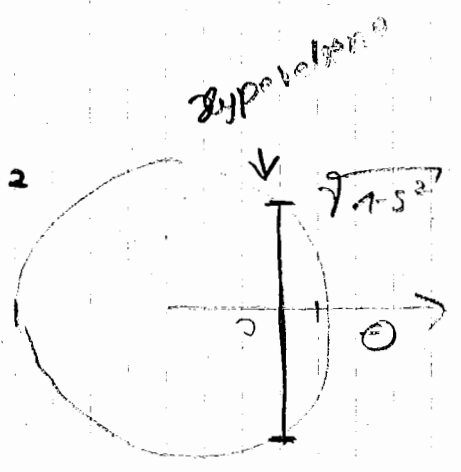
$$\|g\|_{L_2(\mathbb{Z}^n, \omega)} = \int_{\mathbb{R}^1} \int_{S^{n-1}} |g(\theta, s)|^2 \omega(s) ds d\theta$$

Beweis :

$$|(Rf)(\theta, s)|^2 = \left| \int_{\substack{|y| < \sqrt{1-s^2} \\ y \in \theta^\perp}} f(s\theta + y) dy \right|^2$$

↑ Träger 1

$$\leq \int_{\substack{|y| \leq \sqrt{1-s^2} \\ y \in \theta^\perp}} |f(s\theta + y)|^2 dy$$



Cauchy-Schwarz  $\uparrow$  Volumen Kugel Radius  $\sqrt{1-s^2}$  mit Dimension  $n-1$

$$= \omega_{n-1} (\sqrt{1-s^2})^{n-1} \int |f(s\theta + y)|^2 dy$$

$$\int_{-1}^1 |(Rf)(\theta, s)|^2 (1-s^2)^{\frac{1-n}{2}} ds \leq$$

↑ Gewichtsfkt.

↑ f sonst Null

$$\omega_{n-1} \int_{-1}^1 \int_{\substack{|y| < \sqrt{1-s^2} \\ y \in \theta^\perp}} |f(s\theta + y)|^2 dy ds$$

$x := s\theta + y$  durchläuft Inneres der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$

$$= \omega_{n-1} \int_{|x| < 1} |f(x)|^2 dx$$

$$\Rightarrow \|Rf\|_{L_2(\mathbb{Z}^n, (1-s^2)^{-\frac{n}{2}})}^2 \leq \omega_{n-1} \|f\|_{L_2(|x|<1)}^2$$

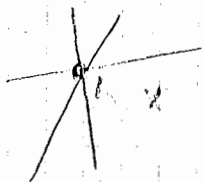
□

Rückprojektion  $R^*$ :  $g \in C(\mathbb{Z}^m)$   
 $\uparrow$  Zylinder

$$(R^*g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

$\{Y \in \mathbb{R}^n : Y \cdot \theta = s, s = x \cdot \theta\}$ : Hyperebene durch  $x$

Integriere über alle Hyperebenen durch  $x$



Riesz-Potential  $d < n$ ,  $f \in \mathcal{S}$

$$(\mathcal{I}^d f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-d} \hat{f}(\xi), \text{ d.R.}$$

$$(\mathcal{I}^d f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{ix\xi} |\xi|^{-d} \hat{f}(\xi)}_{\text{integrierbar}} d\xi$$

$\uparrow$  Riesz-Potential,

definiert durch inv. Fourier-Transform.

Satz 2.4  $R^* : C(\mathbb{Z}^m) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$

$f \in \mathcal{S}, g \in C(\mathbb{Z}^m) \Rightarrow$

$$(Rf, g)_{L_2(\mathbb{Z}^n)} = (f, R^*g)_{L_2(\mathbb{R}^m)}$$

" $R^*$  ist der Adjungierte zur Riesz-Transform."

$$(Rf, g)_{L_2(\mathbb{Z}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} (Rf)(\theta, s) \overline{g(\theta, s)} d\theta ds$$

Beweis:

$$(Rf, g)(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \underbrace{f(z\theta + y)}_{=: x} dx \bar{g}(\theta, s) d\theta ds$$

" /\* Integrale können bel. vertauscht werden  
 "  $\int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}}$  ergeben zusammen  $\int_{\mathbb{R}^n}$  " "

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(\theta, x \cdot \theta) dx d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \int_{S^{n-1}} \bar{g}(\theta, x \cdot \theta) d\theta = (f, R^*g)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

Satz 2.5

$f \in \mathcal{S}$ .  $g = Rf$ ,  $d < n$ . Dann gilt:

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} I^{-d} R^* I^{d-n+1} g$$

Parameter

Riesz-Potentiale, zu verstehen bei Polynom  $\theta$  als Fkt. des zweiten Arguments!

Beweis:

$$I^d f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\bar{\zeta}} |\bar{\zeta}|^{-d} \hat{f}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}$$

Führe Polar-Koordinaten ein:

$$\bar{\zeta} = \rho \cdot \theta \quad \theta \in S^{n-1}, \quad \rho > 0$$

$$\Rightarrow I^d f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S^{n-1}} e^{ix \cdot \rho \theta} |\rho|^{-d+n-1} \hat{f}(\rho \theta) d\theta d\rho$$

$\uparrow d\bar{\zeta} = \rho^{n-1} d\theta d\rho$        $\uparrow$  Betrag später

- ersetze  $\theta$  durch  $-\theta$ ,  $\rho$  durch  $-\rho$

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S^{n-1}} e^{ix \cdot \rho \theta} |\rho|^{-d+n-1} \hat{f}(\rho \theta) d\theta d\rho = I^d f(x)$$

$\uparrow \nabla$   
0

Addiere die Gleichungen!

# Addition

$$2 I^d f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix \cdot \delta \theta} |\delta|^{-d+n-1} \underbrace{\hat{f}(\delta \theta)}_{c(Rf)^\wedge(\theta, \delta)} d\theta d\delta$$

"Egal"  
↻

$$= (2\pi)^{-n/2} c \cdot (2\pi)^{n/2} \dots$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta x \cdot \theta} |\delta|^{-d+n-1} (Rf)^\wedge(\theta, \delta) d\delta d\theta$$

(I<sup>d-n+1</sup> Rf)<sup>^</sup>(θ, δ)

Inverse Fourier-Transform genommen am Argument x · θ der Fkt. ∫<sub>S<sup>n-1</sup></sub> (I<sup>d-n+1</sup> Rf)<sup>^</sup>(θ, ·) dθ

$$= \int_{S^{n-1}} (I^{d-n+1} Rf)(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

$$= (R^* (I^{d-n+1} Rf))(x)$$

$$\Rightarrow (I^d f)(x) = c_1 \cdot (R^* (I^{d-n+1} Rf))(x) \quad | \cdot I^{-d}$$

$$\Rightarrow f = c_1 I^{-d} R^* I^{d-n+1} Rf \quad c_1 = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n}$$

□

Ret.: (m=2)

m=2: setze d=0 (wg günstig)

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4\pi} R^* I^{-1} g$$

$$(I^{-1} g)^\wedge(\theta, \delta) = |\delta| \hat{g}(\theta, \delta) = \text{sgn}(\delta) \cdot \delta \cdot \hat{g}(\theta, \delta)$$

$$= c \text{sgn}|\delta| \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)^\wedge(\theta, \delta)$$

$$= c \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)^\wedge$$

↑  
Faktor

$$= c_1 \cdot (H \frac{\partial g}{\partial s})^\wedge(\theta, \delta)$$

↑ anders c<sub>1</sub> (Hw)(s) = 1/π ∫ ω(t) / (s-t) dt Hilbert-Transform



Radon'sche ~~Faktor~~ Inversionsformel (1917)

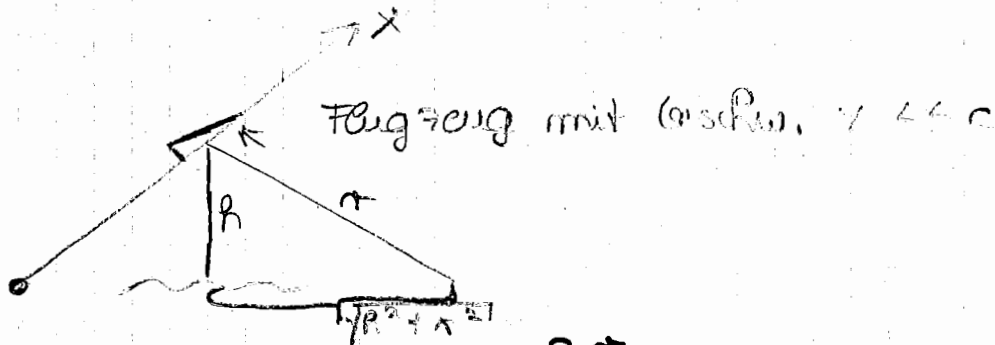
(4)

$$f = c_2 R^* H \frac{\partial}{\partial s} g$$



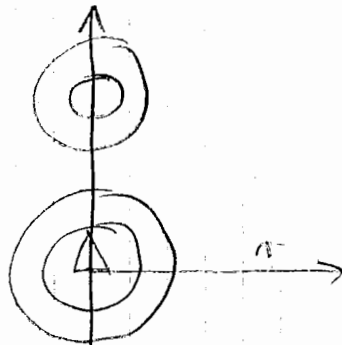
### §3 Rekonstruktion einer Funktion aus ihren sphärischen Mittelwerten

Integralgeometrisches Problem für Synthetic aperture Radar



Signale mit Laufzeit  $\frac{2r}{c}$  werden vom Bodenkreis mit Radius  $\sqrt{R^2 + r^2} \approx r$  reflektiert.

von oben:



$f$  Reflektionseigenschaft des Bodens, Daten

$$g(x, r) = \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \rho, \sin \rho) d\rho$$

Falls  $g$  <sup>un)</sup> gerade bzgl. 2'tem Argument  $\Rightarrow$

$g(x, r) = 0$ , d.h. es kann nur der bzgl. des 2'ten Arguments gerade Anteil von  $f$  bestimmt werden  
Beschränken uns also auf  $f$ :  $f(x, y) = f(x, -y)$

Problem:

$$\text{geg.: } g(x, r) = 2 \cdot \int_0^{\pi} f(x + r \cos \rho, \sin \rho) d\rho$$

ges.:  $f$

Bemerkungen zur Fourier-Transformierte:

i)  $f_a(x) := \cancel{f(ax)} f(a+x)$ ,  $\hat{f}_a(x) = e^{i\langle ax \rangle} \hat{f}(x)$

ii)  $f$  radialsymmetrisch, d.h.  $f(x) = f(\|x\|)$ .

Dann gilt für  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ,  $s := \|\xi\|$

$$\hat{f}(\xi) = s^{1-\frac{m}{2}} \int_0^\infty f(r) r^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(rs) dr$$

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^k}{k! \Gamma(\nu+1)} \quad , \nu \in \mathbb{C}$$

Bessel-Fkt zum Index  $\nu$ .

Hankeltransformation

Herleitung der Inversionsformel:

Sei  $\hat{f}^1$  Fouriertrafo nach 1. Argument und

sei  $\hat{f}^2$  rotationsymm. Fouriertransformation im  $\mathbb{R}^2$ .

$$g(x, r) = 2 \cdot \int_0^\pi f(r \cos p, 0) (x, r \sin p) dp$$

$$\hat{g}^2(\xi, r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} \int_0^\pi f(r \cos p, 0) (s, r \sin p) dp ds =$$

$$2 \cdot \int_0^\pi \hat{f}^1(r \cos p, 0) (\xi, r \sin p) dp \stackrel{\text{Formel angewandt}}{=} \\ 2 \cdot \int_0^\pi f^1(\xi, r \sin p) e^{i\xi r \cos p} dp \stackrel{\text{losgen}}{=}$$

Für  $\xi \in \mathbb{R}$  sei  $G_\xi(x) := \hat{g}^1(\xi, \|x\|)$

( $G$  radialsymmetrisch)

$$\hat{g}(\xi, s) := \cancel{\hat{g}^1} \hat{G}_\xi^2(x) \quad (\|x\| = s)$$

$$= \int_0^{+\infty} \hat{g}^1(\xi, r) r J_0(rs) dr =$$

$$= 2 \cdot \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f^1(\xi, r \sin p) e^{i\xi r \cos p} r J_0(rs) dp dr$$

$$x = r \sin \rho, \quad dr = \frac{dx}{\sin \rho} \quad (2)$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}^{-1}(\xi, x) e^{i \xi x \omega t \rho} \frac{x}{\sin \rho} J_0\left(\frac{x \rho}{\sin \rho}\right) \frac{dx}{\sin \rho} d\rho$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} \hat{f}^{-1}(\xi, x) \times \underbrace{\int_0^{\pi} e^{i \xi x \omega t \rho} \frac{1}{\sin^2 \rho} J_0\left(\frac{x \rho}{\sin \rho}\right) d\rho}_{I} dx$$

Substitution:

$$t = \omega t \rho, \quad \frac{dt}{d\rho} = -\frac{1}{\sin^2 \rho} \quad t^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \rho}$$

$$I = \int_0^{-\infty} e^{i \xi x t} (t^2 + 1) J_0(\sqrt{t^2 + 1} \times \rho) \frac{dt}{-(t^2 + 1)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \xi x t} J_0(\sqrt{t^2 + 1} \times \rho) dt$$

$$= \begin{cases} 2 \cdot \frac{\cos(x \sqrt{\rho^2 - \xi^2})}{x \sqrt{\rho^2 - \xi^2}} & \xi < \rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Oberheftinger, Tabellen zur Fouriertransformation

$$\hat{g}(\xi, \rho) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}} \int_0^{\infty} \cos(x \sqrt{\rho^2 - \xi^2}) \hat{f}^{-1}(\xi, x) dx & \xi < \rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left( = \frac{2 \sqrt{4 \pi}}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}} \hat{f}^{-1}\left(\xi, \sqrt{\rho^2 - \xi^2}\right) \right) \quad \xi < \rho$$

Verallgemeinerung auf  $\mathbb{R}^m$

$$g(x, \tau) := \frac{2}{\tau^{n-1}} \int_{M_\tau} f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + y\right) dS(y)$$

$$x \in \mathbb{R}^{n-1}, \tau \in \mathbb{R}, M_\tau := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = \tau, y_n > 0\}$$

$$\hat{g}(\xi, s) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2 \cdot \hat{f}\left(\xi, \sqrt{s^2 - \|\xi\|^2}\right) \frac{s^{2-n}}{\sqrt{s^2 - \|\xi\|^2}} & \text{für } s > \|\xi\| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

↑ analog  
zu m=2

# § 4 Translationsinvariante Integralgeometrie

22.6.92

$$g(\lambda) = \int_{M(\lambda)} f(x) dx$$

$\nwarrow$  Mannigfaltigkeit

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$  um Scheitelpunkt

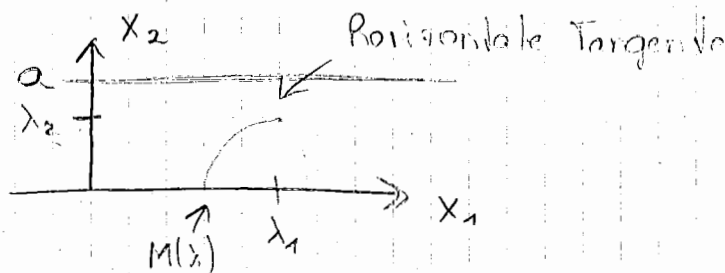
$$x_1 = \lambda_1 + u_+(x_2, \lambda_2)$$

$$\text{für } 0 < x_2 \leq \lambda_2 \leq a$$

$\nearrow$   
 "dadurch  
 horizontale  
 Streifen definiert,  
 a = es ist möglich."

"Für jedes  $\lambda$  hat man eine solche  
 Kurve mit horizontaler Tangente  
 im Punkt  $(\lambda_1)$ ."

"Familie invariant  
 gegenüber  
 horizontalen  
 Verschiebungen"



$u_+$ : oberer Ast dadurch bekommen

$$x_1 = \lambda_1 - u_-(x_2, \lambda_2) \quad /* \text{unterer Ast} */$$

$$M(\lambda + \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}) = M(\lambda) + \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$  Invarianz gegenüber Translationen

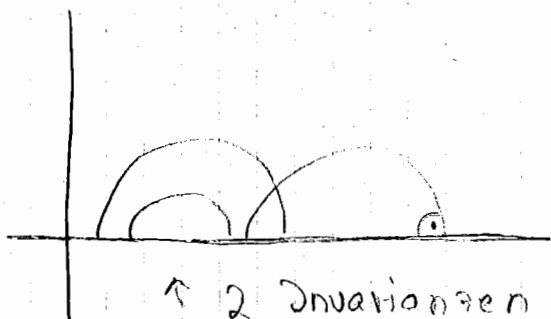
$$u_{\pm}(\lambda_2, \lambda_2) = 0$$

$$u_{\pm}(x_2, \lambda_2) = (\lambda_2 - x_2)^d R_{\pm}(x_2, \lambda_2)$$

$$R_{\pm} \in C^1 \quad \text{in beiden Argumenten} \quad R_{\pm}(\lambda_2, \lambda_2) \neq 0$$

$$0 < d < 1 \quad (\text{damit waagerechte Tangente})$$

Beispiele



$$u_{\pm}(x_2, \lambda_2) = \pm \sqrt{\lambda_2^2 - x_2^2}, \quad d = \frac{1}{2}$$

erfüllt Bed.,

Beispiel aus letzter Vorlesung

$\uparrow$  2 Invarianten, kann man auch noch "auflösen",  
 gibt Inversionsformel

Abel'sche Integralgleichung: (Volterra'sche)

$$\int_0^x (x-t)^{d-1} k(x,t) f(t) dt = g(x)$$

← unwesentlich  
 $0 \leq x \leq 1$

$0 < d < 1$  ← in ganzer Vorlesung  $k(x,x) = 1$  ← damit  $\neq 0$   $OE = 1$

Beispiel:

$$(y^d f)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \dots$$

$$\Gamma(d) = \int_0^{\infty} t^{d-1} e^{-t} dt$$

$\text{Re } d > 0$

Beta-Fkt:

$$B(d, \beta) = \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$\text{Re } d > 0$   $\text{Re } \beta > 0$

Zus.-hang:

$$B(d, \beta) = \frac{\Gamma(d) \Gamma(\beta)}{\Gamma(d+\beta)}$$

$$(y^d f)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^x (x-t)^{d-1} f(t) dt$$

Wäre  $d \geq 1$ , so:

$$y^1 f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$y^2 f(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt \stackrel{\text{part. integriert}}{=} \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt$$

$y^3$  integriert 3\* und so weiter!



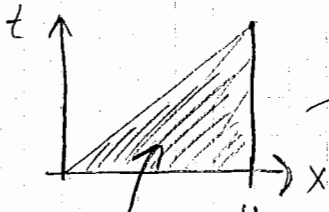
Satz 4.1

Sei  $0 < d < 1$ ,  $g \in C^1$ . Dann ist  $y^d f = g$  eindeutig lösbar, und zwar ist  $f = \frac{d}{dx} y^{1-d} g$

Beweis:

Angenommen, wir haben eine Lösung:  $\frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^x (x-t)^{d-1} f(t) dt = g(x)$   $\Big| \cdot \frac{(y-x)^{-d}}{\Gamma(1-d)} \Big|_0^y$

$$\frac{1}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^y \int_0^x (y-x)^{-d} (x-t)^{d-1} f(t) dt dx$$



Bezeichn.  $y$  über dem integriert wird

$$= \frac{1}{\Gamma(1-d)} \int_0^y (y-x)^{-d} g(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^y \int_t^y f(t) (y-x)^{-d} (x-t)^{d-1} dx dt = \dots$$

wie gerade

$$x = t + \lambda(y-t) \quad (\text{damit } \int_0^1 !)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^y f(t) \int_0^1 \lambda^{d-1} (y-t)^{d-1} (1-\lambda)^{-d} (y-t)^{-d} (y-t) d\lambda dt$$

$dx = d\lambda(y-t)$

$$x-t = \lambda(y-t)$$

$$x-y = t(1-\lambda) + \lambda y - y = (1-\lambda)(t-y)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^y f(t) B(d, -d+1) dt = \dots$$

$$= \frac{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(1)}$$

wie vorher

$$\Gamma(1) = 1$$

↑ kürzt sich raus!

$$\Rightarrow \int_0^y f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-d)} \int_0^y (y-x)^{-d} g(x) dx$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{d}{dy} \int_0^y f(t) dt = \frac{d}{dy} y^{1-d} g(y)$$

Wenn lösbar, dann dies Lösung.

Rückwärts: Dies ist Lösung.  $\square$

#### Satz 4.2

Sei  $0 < d < 1$ . Sei  $g \in C^1$ ,  $k \in C$ ,  $k(x, x) = 1$

Dann ist

$$\int_0^x (x-t)^{d-1} k(x, t) f(t) dt = g(x)$$

eindeutig lösbar. (ex. keine exakte Inversionsformel)

(ohne Beweis)

#### Satz 4.3

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  und sei

$u_{\pm}(x_2, \lambda_2) = (\lambda_2 - x_2)^d R_{\pm}(x_2, \lambda_2)$ ,  $R_{\pm} \in C^1$ ,

$R_{\pm}(\lambda_2, \lambda_2) \neq 0$ ,  $0 < d < 1$  (Problem am Anfang)

Dann ist  $f$  durch  $g(\lambda) = \int_{M(\lambda)} f(x) dx$  eindeutig

bestimmt.

(siehe Beginn § 4)

Beweis:

$$\begin{aligned}
 g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \quad , \quad \delta \in \mathbb{R} \quad , \quad g_\delta(x) &= g(x+\delta) \\
 \widehat{(g_\delta)}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g_\delta(x) e^{-ix\xi} dx \\
 &\stackrel{\text{Fourier-Transform}}{=} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int g(x+\delta) e^{-ix\xi} dx \\
 &\stackrel{\uparrow x'=x+\delta}{=} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int g(x') e^{-ix'\xi} dx' \cdot e^{i\delta\xi} \\
 &= e^{i\delta\xi} \widehat{g}(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(\lambda) &= \int_{M(\lambda)} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\lambda_2} f(\lambda_1 + u_+(x_2, \lambda_2), x_2) \left(1 + \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx_2 \\
 &\quad + \int_0^{\lambda_2} f(\lambda_1 - u_-(x_2, \lambda_2), x_2) \left(1 + \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx_2
 \end{aligned}$$

↙ rechter Zweig  
 ↘ Bogenlänge  
 ↗ siehe Beginn §4  
 ↖ linker Zweig  
 Invarians bzgl  $\lambda_1$ , Fourier-Transform darauf!  
 $\frac{du_+}{dx_2}$   
 $\frac{du_-}{dx_2}$

Berechne Fourier-Transform bzgl  $\lambda_1$ :

Lasse Faktor  $(2\pi)^{\frac{1}{2}}$  weg! Doch nicht.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(\lambda_1) e^{-i\lambda_1 \xi_1} d\lambda_1 &\stackrel{\text{vertausche Integration gleichseitig}}{=} \int_0^{\lambda_2} \left\{ e^{iu_+(x_2, \lambda_2)\xi_1} \widehat{f}(\xi_1, x_2) \left(1 + \left(\frac{du_+}{dx_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. e^{-iu_-(x_2, \lambda_2)\xi_1} \widehat{f}(\xi_1, x_2) \left(1 + \left(\frac{du_-}{dx_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\} dx_2
 \end{aligned}$$

$$\widehat{f}(\xi_1, x_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int f(\lambda_1, x_2) e^{-i\xi_1 \lambda_1} d\lambda_1$$

partielle Fourier-Transform von  $f$   
 bzgl des 1. Arguments  $\lambda_1$

$$= \int_0^{\lambda_2} \hat{f}(\xi_1, x_2) K(\xi_1, x_2, \lambda_2) dx_2$$

$$K(\xi_1, x_2, \lambda_2) = e^{iu_+(x_2, \lambda_2)\xi_1} \left(1 + \left(\frac{du_+}{dx_2}\right)^2\right)^{1/2} + e^{-iu_-(x_2, \lambda_2)\xi_1} \left(1 + \left(\frac{du_-}{dx_2}\right)^2\right)^{1/2}$$

Für jedes  $\xi_1$  eine Volterra'sche Integralgleichung.

„Schar von 1-dim. Problemen statt 1 zwei-dim. Problem, Existenz sind lösbar“

$$\begin{aligned} \frac{du_{\pm}}{dx_2} &= -d \cdot (\lambda_2 - x_2)^{d-1} R_{\pm}(x_2, \lambda_2) + (\lambda_2 - x_2)^d \frac{\partial R_{\pm}}{\partial x_2}(x_2, \lambda_2) \\ &= (\lambda_2 - x_2)^{d-1} \left\{ -d R_{\pm}(x_2, \lambda_2) + (\lambda_2 - x_2) \frac{\partial R_{\pm}(x_2, \lambda_2)}{\partial x_2} \right\} \\ &= (\lambda_2 - x_2)^{d-1} \cdot L_{\pm}(x_2, \lambda_2) \\ &\quad \rightarrow \infty \text{ mit } x_2 \rightarrow \lambda_2 \end{aligned}$$

Für  $x_2 \approx \lambda_2 \Rightarrow$  Ausdruck klein

$$L_{\pm}(\lambda_2, \lambda_2) \neq 0$$

$$K(\xi_1, x_2, \lambda_2) = (\lambda_2 - x_2)^{d-1} T_{\xi_1}(x_2, \lambda_2) \quad , T \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) e^{-i\xi_1 \lambda_1} d\lambda_1 =$$

$$\int_0^{\lambda_2} (\lambda_2 - x_2)^{d-1} T_{\xi_1}(x_2, \lambda_2) \hat{f}(\xi_1, x_2) dx_2$$

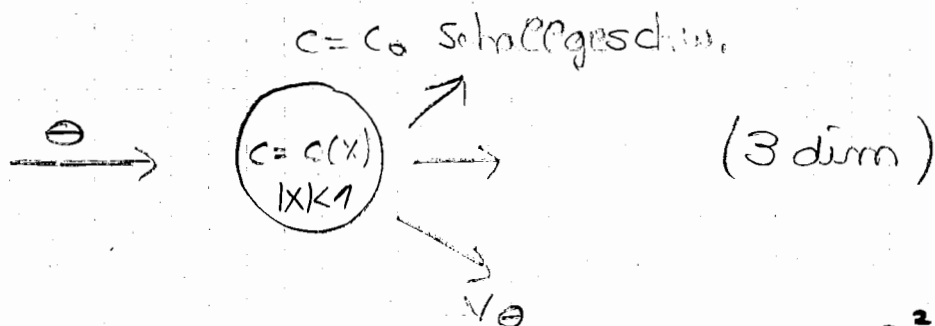
Satz 4.2  $\Rightarrow \hat{f}$  ist eindeutig bestimmt  $\Rightarrow$

$f$  ist eindeutig bestimmt □

25.6.92

## Teil IV Spezielle inverse Probleme

## §1 Das inverse Streuproblem der Akustik



Wellengleichung:  $c^2(x) \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$u(x, t) = e^{i\omega t} U(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u \quad \Delta u = e^{i\omega t} \Delta U$$

$$c^2(x) \Delta U e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t} U$$

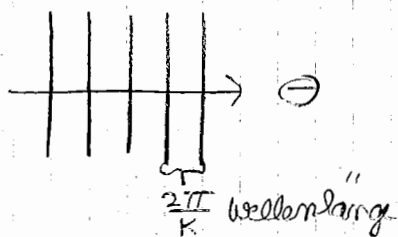
$$\Delta U + \frac{\omega^2}{c^2(x)} U = 0 \quad \text{heißt Reduzierte Wellengleichung}$$

$$\theta \in S^{n-1}$$

$$k = \frac{\omega}{c_0}$$

$$|x| > 1: \Delta U + k^2 U = 0$$

Helmholtz - Gleichung



$$U(x) = e^{ikx\theta} + v_\theta(x)$$

$v_\theta(x)$  erfülle Ausstrahlungsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} v_\theta - ik v_\theta \rightarrow 0$$

↑ in geeignetem Sinn

Bezeichnung:  $\frac{\omega^2}{c^2(x)} = k^2 (1 - q(x))$

$$q(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \geq 1, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Satz 1 : (  $m=3!!$  )

Sei  $g \in C^1$ . Dann gibt es genau eine Lösung  $u$  mit  $\tau \cdot \max_{|x|=\tau} |v_\theta(x)| \leq M$ . (\*)

$$\tau^2 \cdot \max_{|x|=\tau} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \text{grad } v_\theta(x) - ik v_\theta(x) \right| \leq M$$

und es gilt:

$$u(x) = e^{ikx \cdot \theta} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \underbrace{H(\theta, \frac{x}{|x|}, k)}_{\text{Fernfeld}} + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

(was gemessen wird)

Beweis:

Green'sche Funktion der Helmholtz-Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = f, & R \text{ konstant} \\ f \in C^1, f(x) = 0 \text{ für } |x| \geq 1 \\ v \text{ erfülle die Ausstrahlungsbedingung (*)} \end{cases}$$

Dies Problem ist eindeutig lösbar und

$$v(x) = \int_{|y|<1} G_k(x,y) \cdot f(y) dy$$

$$G_k(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad (\text{part Dge, WS '91})$$

$$w(x) = e^{ikx \cdot \theta} \text{ erfüllt } \Delta w + k^2 w = 0, \text{ denn}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_e^2} = -R^2 \theta_e^2 \Rightarrow \Delta w = \sum_{e=1}^{m(=3)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_e^2} = -R^2 \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \theta_i^2\right)}_{=1} \cdot w$$

Einheitsv.

$$u = w + v_\theta$$

$$v_\theta = u - w$$

$$(\Delta + k^2) v_\theta = (\Delta + k^2) u - \underbrace{(\Delta + k^2) w}_=0$$

$$\Delta u + k^2 (1-q) u = 0 \quad (\text{Reduzierte Wellengl.})$$

(2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\Delta + k^2) v_0 &= k^2 q \mathcal{U} \\ &= k^2 q (w + v_0) \\ &= k^2 q (e^{ikx_0} + v_0) \\ &=: f \end{aligned}$$

Satz aus part Dgl

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v_0(x) &= \int_{|y| < 1} G_k(x, y) f(y) dy \\ &= k^2 \int_{|y| < 1} q(y) (e^{ik_0 y} + v_0(y)) G_k(x, y) dy \end{aligned}$$

Existenz: (kurz gefaßt)

$$v_0 = T v_0 \quad (\text{Iteration})$$

(Näherung einsetzen, zeigen, daß konvergiert, Fixpunkt !!!)

Lösungsdarstellung:

$$|x| \gg 1, \quad |y| < 1 \quad (\text{nehme an})$$

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2xy + |y|^2} = |x| \cdot \sqrt{1 - 2 \frac{|x|}{|x|} \frac{y}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2}}$$

$$\text{Wg } \sqrt{1+2\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ für } \varepsilon \text{ klein } \Rightarrow$$

$$|x-y| = |x| \left( 1 - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \right)$$

$$= |x| - \frac{x}{|x|} \cdot y + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$v_0(x) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y| < 1} q(y) (e^{ik_0 y} + v_0(y)) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy$$

$$= \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y| < 1} q(y) \cdot (e^{ik_0 y} + v_0(y)) \cdot$$

$$\frac{e^{ik(|x| - \frac{x}{|x|} \cdot y)}}{|x|} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) dy$$

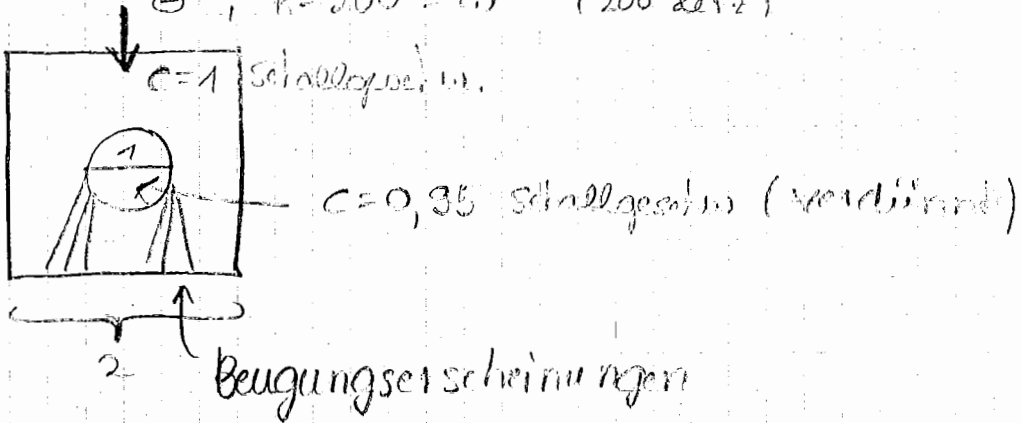
$$|x| \rightarrow \infty$$

$$V_{\Theta}(x) = \frac{k^2}{4\pi} e^{ik|x|} \int_{|y|<1} \sqrt{e^{-ik \frac{x}{|x|} \cdot y} (e^{ik\Theta y} + V_{\Theta}(y))} dy + \Theta \left( \frac{1}{|x|^2} \right)$$

$$F(\Theta, \omega, k) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y|<1} \sqrt{e^{-ik\omega y} (e^{ik\Theta y} + V_{\Theta}(y))} dy$$

Beispiel

$\Theta = 1, k=200 \approx 1,1$  (200 Herz)





Das inverse Problem:

$V_\theta(x)$  bekannt für  $\theta \in S^{n-1}, |x| > 1$

Finde  $q!$  ( $k$  fest) /\* sonst zu viele Messungen, praktisch bleiben! \*/

1) Born'sche Näherung: ( $n=3$ )

Vernachlässige  $V_\theta$  in der Formel

$$F(\theta, \omega, k) = \frac{k^2}{4\pi} \int q(y) e^{-ik\omega y} (e^{ik\theta y} + V_\theta(y)) dy$$

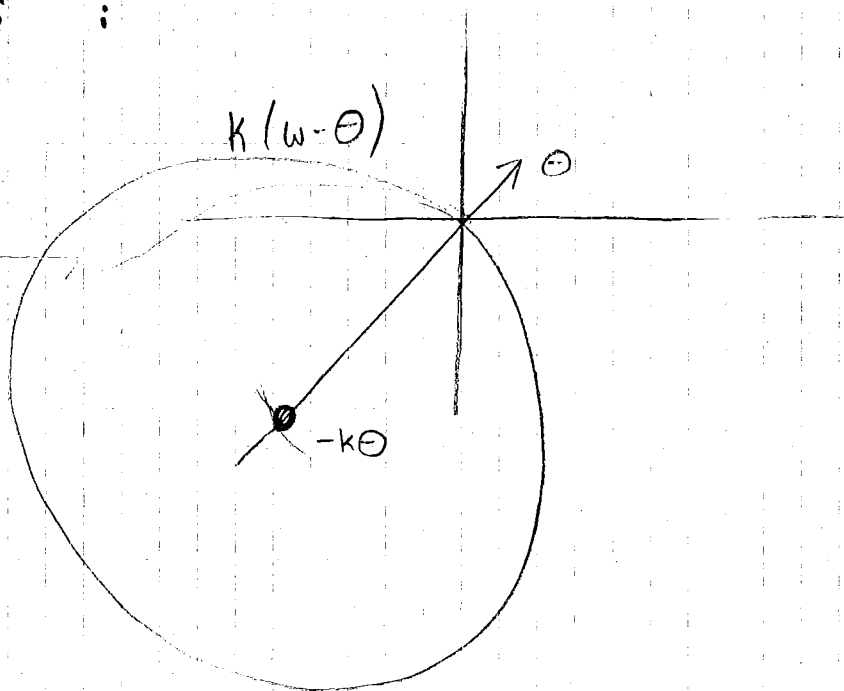
$$\Rightarrow F(\theta, \omega, k) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y| < 1} q(y) e^{iky(\theta - \omega)} dy$$

$$(2\pi)^{3/2} \hat{q}(k(\omega - \theta)) \quad 3 \text{ dim}$$

Messung Fernfeld  $\hat{=}$  Messung Fourier-Transform, die ist invertierbar!!

$(\mathbb{R}^3)$

$\omega, \theta \in S^2$  :



Fourier - Trafo ist bekannt ( $\hat{q}(\xi)$ ) für alle  
Kugeln vom Radius  $k$  durch den Nullpunkt.

$\Rightarrow \hat{q}(\xi)$  bekannt für  $|\xi| \leq 2k$

$\Rightarrow q$  bekannt mit großer Genauigkeit, falls  $k$  groß.

Also große Frequenz annehmen, man dringt schnell mit  
großer Frequenz nicht weit ein.  $\Rightarrow$  Kompromiß!!

Beziehung zur Integralgeometrie ( $m=2$ )

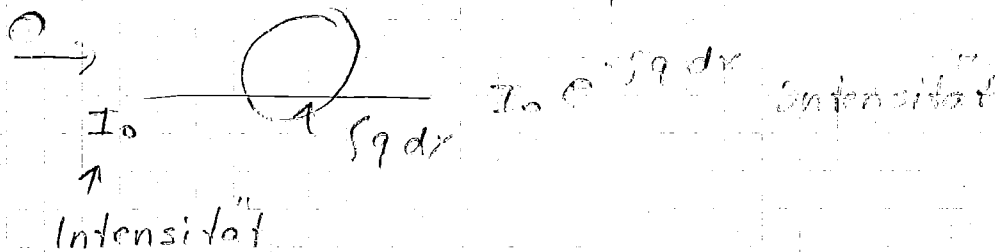
$k \rightarrow \infty$ : Kreise entarten zu Geraden durch Ursprung.

$\hat{q}(\delta\theta)$  bekannt,  $|\delta| \leq 2k$ ,  $\theta \in S^{n-1}$

Raden - Trafo:

$$(\mathcal{R}q)^\wedge(\theta, \delta) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{q}(\delta\theta)$$

Raden - Transformation, bekannt ( $k$  groß)



$$F(\theta, \omega, k) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y| < 1} q(y) e^{ik(\theta \cdot \bar{\omega}) \cdot y} dy$$

Born'sche Näherung,  $|V_0(x)| \ll 1$

Fourier-Transformation von  $q$  auf Ewald-Kugeln (Kugeln vom Radius  $k$  durch den Ursprung)

Fourier-Transform von  $q$  in  $|\xi| < 2 \cdot k$

Alternative Behandlung für große  $k$ :

$$u_\theta(x) = e^{ikx\theta} (1 + W_\theta) \quad /* \text{andere Ansatz} */$$

$$\Delta u_\theta + k^2(1 - q)u_\theta = 0$$

$$e^{ikx\theta} \Delta W_\theta + 2 \cdot ik\theta \cdot \nabla W_\theta + (1 + W_\theta) \cdot (-k^2) e^{ikx\theta} + k^2(1 - q) e^{ikx\theta} (1 + W_\theta) = 0$$

NR:  $\Delta(u \cdot v) = v \Delta u + 2 \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \Delta v$

$$\Rightarrow \Delta W_\theta + 2ik\theta \nabla W_\theta = k^2 q (1 + W_\theta)$$

$k$  groß:  $\nabla$  enthält kein  $k$ , Born'sche Näherung

$$\Rightarrow \theta \cdot \nabla W_\theta(x) = \frac{k}{2i} q(x)$$

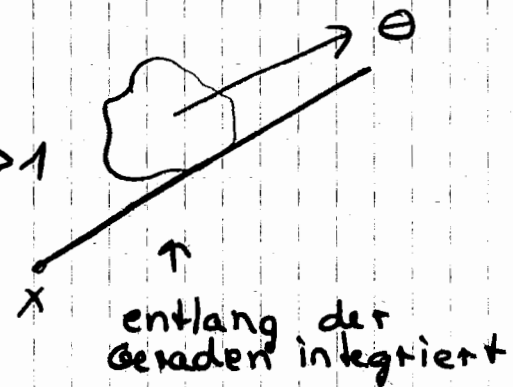
$\uparrow$  Richtungsableitung, Richtung  $\theta$

$$W_\theta(x) = \frac{k}{2i} \int_0^\infty q(x + t\theta) dt, |x| > 1$$

$W_\theta(x)$  geg.,  $\theta \in S^2, |x| > 1$

$\Rightarrow$  ~~W~~ Sämtliche Integrale von  $q$  entlang Geraden in  $\mathbb{R}^3$

~~/\* Radon'sches Problem \*/~~



## §2 Das inverse Problem der Impedanz-Tomographie in linearer Näherung

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  beschränkt, Leitfähigkeit  $\gamma$   
 $u$  elektrisches Potential, genügt:  $\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0$  in  $\Omega$   
 Nehme an:  $u, \gamma \frac{\partial u}{\partial n}$  auf  $\partial \Omega$  bekannt (gemessen)  
 für eine große Klasse von Fkt.  $u$

Gesucht:  $\gamma$

Linearisierung:  $\gamma = \gamma_0 + q$ ,  $\gamma_0$  bek.,  $|q| \ll \gamma_0$

$$q = 0 \text{ auf } \partial \Omega$$

$$u = u_0 + w, \quad u_0 \text{ bek.}, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial \Omega$$

$$\operatorname{div}(\gamma_0 \nabla u_0) = 0$$

$$\operatorname{div}((\gamma_0 + q) \nabla (u_0 + w)) = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\operatorname{div}(\gamma_0 \nabla u_0)}_{=0} + \operatorname{div}(q \nabla u_0) + \operatorname{div}(\gamma_0 \nabla w) + \operatorname{div}(q \nabla w) = 0$$

↑  
 klein wg.  $q, w$   
 klein

$$\leadsto \left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(q \nabla u_0) + \operatorname{div}(\gamma_0 \nabla w) = 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial \Omega \end{array} \right\} *$$

Inverses Problem für (\*):

Sei  $w|_{\partial \Omega}$  bekannt für "viele"  $u_0$ .

Bestimme  $q$ !

Spezialisierung:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$$

$$\gamma_0 = 1 \quad / * \text{ gleichförmig } * /$$

$$\text{Für jedes } \theta \text{ aus } \partial \Omega : u_0(x) =: u_\theta(x) = \frac{x_1'}{x_1'^2 + x_2'^2}$$

$$x_1' = \theta^\perp \cdot x \quad x_2' = 1 - \theta \cdot x$$

$$\theta^\perp = \begin{pmatrix} -\theta_2 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$



Schreibweise:

$x \in \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = x_1 + i x_2$

/\* Verwende Notationen durcheinander! \*/

$\theta = \theta_1 + i \theta_2 \quad \theta^\perp = -\theta_2 + i \theta_1 \quad \text{etc}$

Führe ein:  $v_\theta = \frac{-x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2}$

$u_\theta(x) + i v_\theta(x) = \frac{x_1' - i x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2} = \frac{\overline{x'}}{x' \cdot \overline{x'}} \stackrel{\text{in } \mathbb{C}}{=} \frac{1}{x'}$

$x' = x_1' + i x_2' = (-\theta_2 x_1 + \theta_1 x_2) + i (1 - \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2)$   
 $= i (1 - \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 + i (\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2))$   
 $= i (1 - \overline{\theta} x)$

komplexes Produkt

$\overline{\theta} x = (\theta_1 - i \theta_2)(x_1 + i x_2)$

$u_\theta + i v_\theta$  hängt analytisch von  $x$  ab!

$\Rightarrow u_\theta(x) + i v_\theta(x) = \frac{1}{i(1 - \overline{\theta} x)} \Rightarrow \Delta u_\theta = 0$

$(**)$   $\begin{cases} \Delta w + \nabla q \cdot \nabla u_\theta = \sigma \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial \Omega \end{cases}$

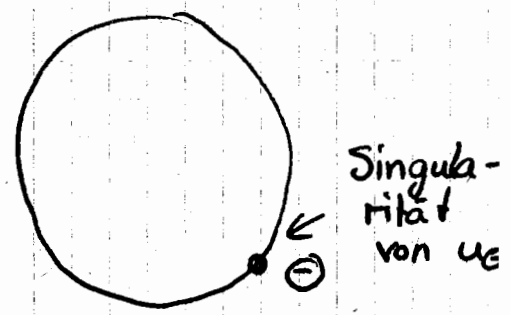
Inverses Problem für (\*\*):

$w|_{\partial \Omega}$  bek für jedes  $\theta \in \partial \Omega$

Bestimme  $q$ !

$u_\theta(x)$ :

Spannungsverteilung für eine Stromquelle  $\ominus$

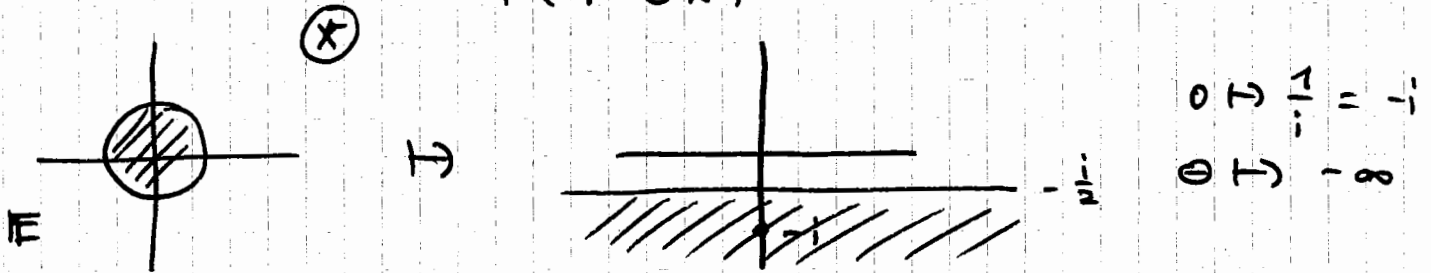


## Weitere Vereinfachungen:

Variablentransformation

$$z_1 = u_\theta(x), \quad z_2 = v_\theta(x)$$

$$z = z_1 + i z_2 = \frac{1}{i(1 - \bar{\theta}x)}$$



$$\begin{aligned}
 |x|=1 &\Rightarrow \bar{\theta}x = e^{id} \\
 z &= \frac{1}{i(1 - e^{id})} = \frac{1 - e^{-id}}{i|1 - e^{id}|^2} = \frac{1 - \cos d + i \sin d}{i(1 - \cos^2 d + \sin^2 d)} \\
 &= \frac{\sin d - i(1 - \cos d)}{2(1 - \cos d)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Im } z = -\frac{1}{2}$$

Durch  $x \mapsto z$  wird  $\Omega$  in die ~~untere~~ Halbebene  $\text{Im } z < -\frac{1}{2}$  eindeutig und konform abgebildet.

$$\theta \rightarrow \infty, \quad |x|=1 \rightarrow \text{Im } z = -\frac{1}{2}$$

Transformation der Differentialgleichung:

$$x = \phi(z) \quad /* \text{ Umkehrabb., analytisch } */ /$$

$$W(z) = w(\phi(z)), \quad Q(z) = q(\phi(z))$$

$$/* \phi = \phi_\theta */ / \quad /* q \text{ unabh. von } \theta, Q = Q_\theta */ /$$

Vorlesung part. Dge, § 9, Teil III:

$$\Delta_x W = \frac{1}{\left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|^2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial z_j} \left( h_{ij} \frac{\partial W}{\partial z_i} \right), \quad H = \begin{pmatrix} h_{ij} \end{pmatrix}$$

$$H = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^{-t}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{pmatrix}$$

$x = \Phi(z)$  heißt:  $x_1 = \Phi_1(z_1, z_2)$   $x_2 = \Phi_2(z_1, z_2)$   
 $\Phi_1, \Phi_2$  erfüllen Cauchy - Riemann'sche Dgl'n:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^t \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} \right)^2 & \cancel{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2}} \\ \sigma \uparrow \text{wg Cauchy-Riemann} & \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \right)^2 \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \quad \uparrow \text{wg Cauchy-Riemann} \end{aligned}$$

$$= d^2 I \quad , \quad d^2 = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} \right)^2$$

/X konform: erhält Winkel.  
 gewährleistet bei Vielfachen von  $I$  \* /

$$\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{z}_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{z}_1}$$

$$= d^2 \quad \text{wg Cauchy-Riemann}$$

$$H = I$$

$$\Delta_x W = \frac{1}{d^2} \Delta_{\bar{z}} W$$

Einfach mal ausrechnen:

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}_1}$$

$$NR: \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right)^t \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right)^* = d^2 I \quad \Rightarrow$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} = \frac{1}{d^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right)^t = \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial q}{\partial x_1} d^2 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} d^2 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x_2}$$

$$= d^2 \nabla q \nabla \bar{z}_1$$

$$= d^2 \nabla q \nabla u_0$$



$$\frac{1}{d^2} \Delta_2 W + \frac{1}{d^2} \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0 \quad \text{aus } (**)$$

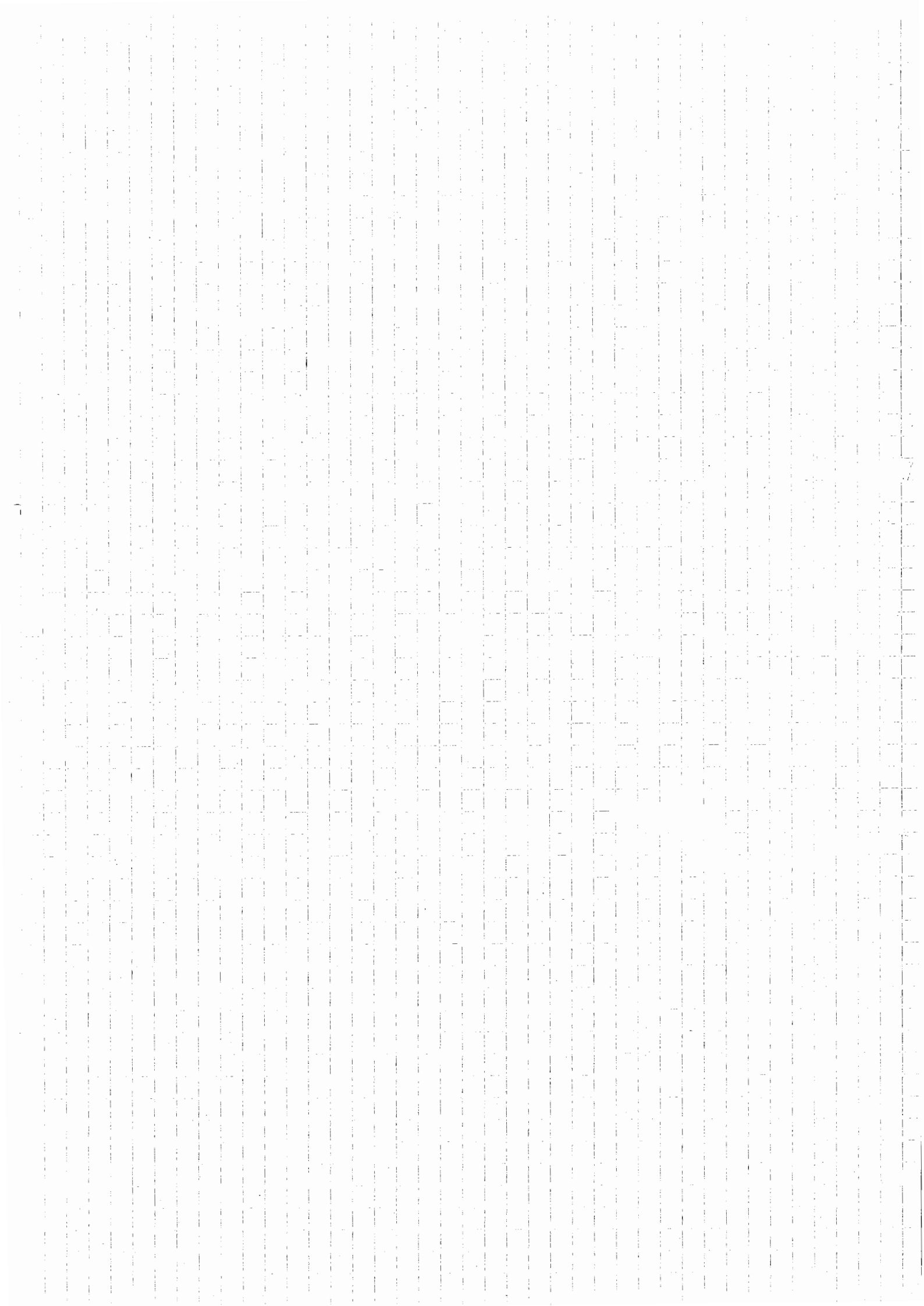
~~(\*)~~  
(4)

$$\Rightarrow \Delta W + \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial z_2} = 0$$

} (\*\*\*)

Dritte Form des Inversen Problems  
/ \* wird nicht mehr vereinfacht \* /



zu Blatt 8



Kugelschalen um  $z=0$  herum durch  
 $e^{ik|x-z|} \cdot \frac{1}{4\pi|x-z|}$

Gesamtsg.:

$$e^{ik|x-z|} \cdot \frac{1}{4\pi|x-z|} + v_2 = u_2$$

↑  
erfüllt

Mischungsgleichung

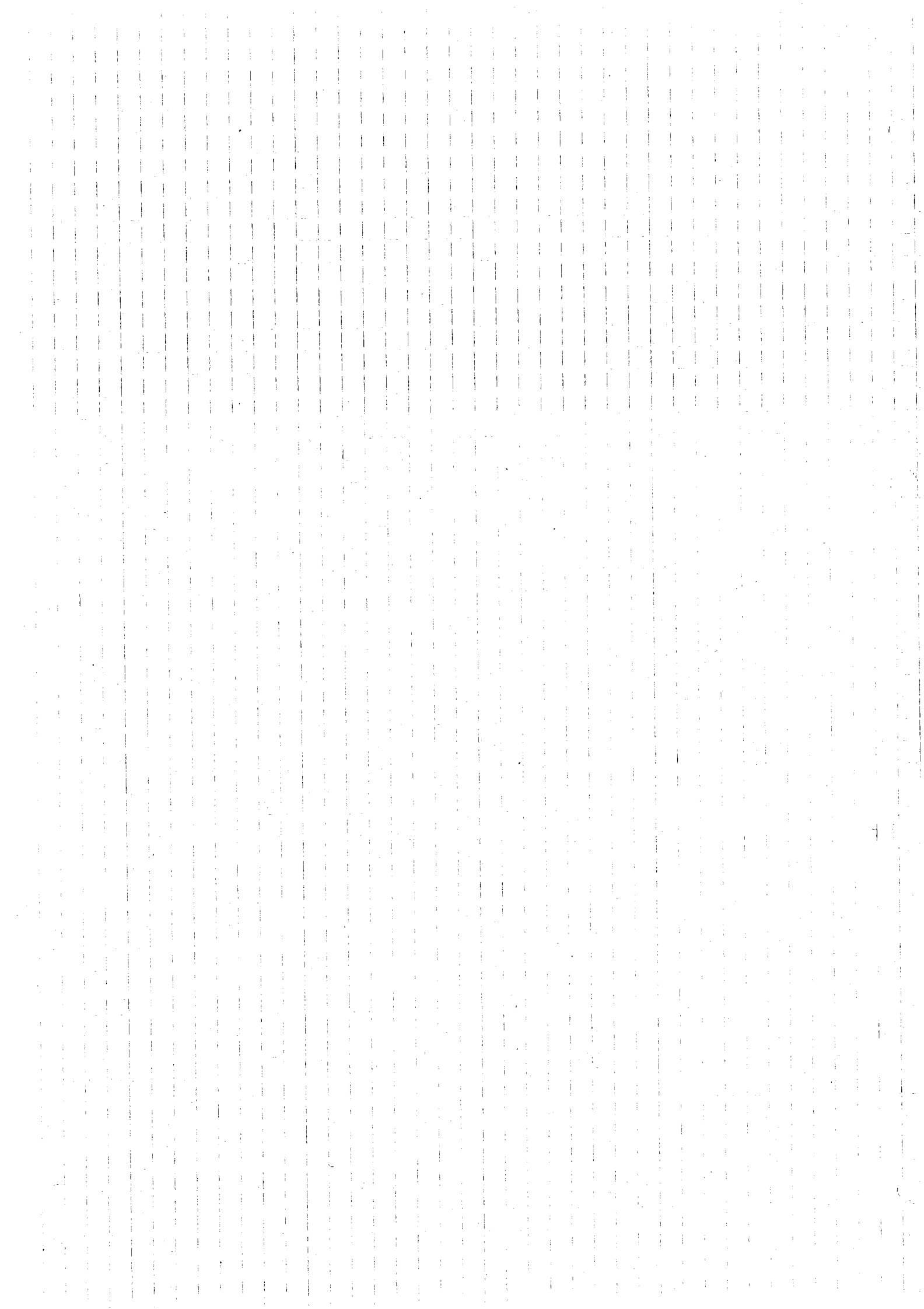
u erfüllt

$$\Delta u_2 + k^2(1-q)u_2 = -\delta_2$$

$$-\delta_2 = (\Delta + k^2) \cdot \frac{e^{ik|x-z|}}{4\pi|x-z|}$$

↑

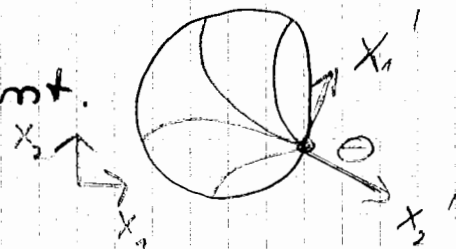
Distribution



# Impedanz-Tomographie in linearer Wärerung

Wdh  $\Delta W + \nabla q \nabla u_\theta = \sigma$  in  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$   
 $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$  auf  $\partial \Omega$  (\*\*)

Für  $\theta \in \partial \Omega$  ist  $W|_{\partial \Omega}$  bekannt.  
 Bestimme  $q$ !



1) Methode: Transformation

$$z_1 = u_\theta(x) \quad z_2 = v_\theta(x)$$

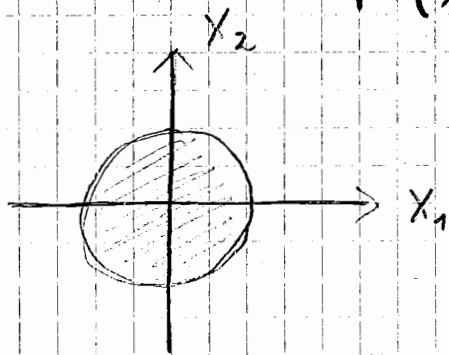
$$u_\theta(x) = \frac{x_1'}{x_1'^2 + x_2'^2} \quad v_\theta(x) = \frac{-x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2}$$

$$x_1' = \theta \cdot x \quad x_2' = 1 - x \cdot \theta$$

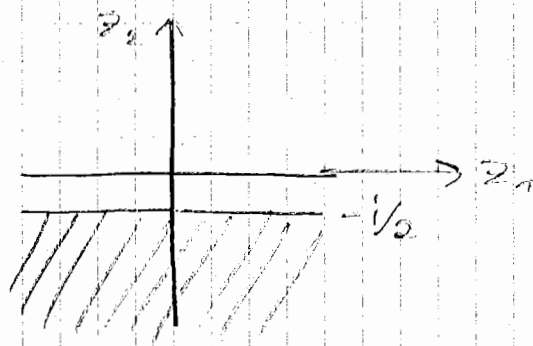
$$z_1 + iz_2 = \frac{1}{i(1 - \bar{\theta}x)}$$

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2$$

$$\Rightarrow \bar{\theta} = \theta_1 - i\theta_2$$



$\mapsto$



$$W(z) = w(x) \quad Q(z) = q(x)$$

$$Q(z) = q(x)$$

$$\leadsto \Delta W + \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0 \quad \text{für } \text{Im } z < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z_2} = 0 \quad \text{auf } \text{Im } z = -\frac{1}{2}$$

/ \* invariant bzgl Verschiebung in  $z_1$ -Richtung  $\Rightarrow$  \* /  
 Lösung durch Fourier-Transformation in  
 $z_1$ -Richtung!

Multiplizierte Dgl mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s_1 z_1} ( ) d s_1 = 0$

$$\leadsto \hat{W}(s_1, z_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i s_1 z_1} W(z_1, z_2) dz_1$$

$$0 = -s_1^2 \hat{W}(s_1, z_2) + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \hat{W}(s_1, z_2) + i s_1 \hat{Q}(s_1, z_2)$$

/\* Das war  $\Delta W + \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0$  /\*  $z_2 < -\frac{1}{2}$   
 $\uparrow$   
 ist  $\text{Im}(z)$

$$0 = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z_2} (s_1, -\frac{1}{2}) = 0$$

/\* Das war  $\frac{\partial Q}{\partial z_2} = 0$  auf  $\text{Im } z = \frac{1}{2}$  /\*

$$\hat{W}(s_1, -\frac{1}{2}) = g_0(s_1) \text{ bekannt f\u00fcr } \theta \in \partial \Omega, s_1 \in \mathbb{R}$$

"geht 1-dim. Problem, Eine Invariant  $\Rightarrow$  1. Dim. Wert"

$$\hat{W}'' - s_1^2 \hat{W} = f$$

gew. Dgl  $z_2 < -\frac{1}{2}$

$$\hat{W}'(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$\hat{W}(-\frac{1}{2}) = g_0$$

$$\hat{W}(z_2) = g_0 \cosh(s_1(z_2 + \frac{1}{2})) + \frac{1}{s_1} \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \sinh(s_1(z_2 - z_2')) f(z_2') dz_2'$$

$$\hat{W}(s_1, z_2) = g_0(s_1) \cosh(s_1(z_2 + \frac{1}{2})) -$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \sinh(s_1(z_2 - z_2')) \hat{Q}(s_1, z_2') dz_2'$$

↑  
bekannt f\u00fcr  $z_2 \rightarrow -\infty$

/\* schwierig, halben Tag gerechnet, aber geht:  
 Integralgl. in  $\hat{Q}$  bekommen /\*

Alternativ, braucht Satz aus part 1, WS 91:

Satz 2.1 (der Vorlesung) (Teil III)

$\Omega$  Normalgebiet im  $\mathbb{R}^2$ ,  $w \in C^2(\bar{\Omega})$ . Dann

gilt für  $x \in \Omega$ :

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \gamma(x-y) \frac{\partial w}{\partial \nu}(y) - w(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \gamma(x-y) \right\} d\beta(y) - \int_{\Omega} \gamma(x-y) \Delta w(y) dy$$

↑ "äußere Normale"

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$$

Anwendung auf (\*\*)

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$$

$$w(x) = - \int_{|y|=1} w(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \gamma(x-y) d\beta(y) + \int_{|y|<1} \gamma(x-y) \nabla q(y) \cdot \nabla u_{\theta}(y) dy$$

Doppelschicht      ↑ inneres Produkt

$x \rightarrow w \in \partial\Omega$

{ zur Doppelschicht: Man weiß:  $x \rightarrow w \Rightarrow$   
 { Doppelschicht  $\rightarrow - \int_{|y|=1} w(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \gamma(w-y) d\beta(y) + \frac{1}{2} w(w)$  }

← bekannt für  $w, \theta \in \partial\Omega$

$$\frac{1}{2} w(w) + \int_{|y|=1} w(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \gamma(w-y) d\beta(y) = \int_{|y|<1} \gamma(w-y) \nabla q(y) \cdot \nabla u_{\theta}(y) dy$$

$g(w, \theta)$

$\int_{|y|<1} \gamma(w-y) \nabla q(y) \cdot \nabla u_{\theta}(y) dy$  Integralgleichung für  $q!$   
 ( $q$  2-dim, 2 Variablen)

$$\int_{|y|<1} \nabla q (\delta \nabla u_\theta) dy = - \int_{|y|<1} q \operatorname{div}(\delta \nabla u_\theta) dy$$

$$= - \int_{|y|<1} q \nabla \delta \nabla u_\theta dy \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{part. integriert} \\ \text{wg } \Delta u_\theta = 0, u_\theta \text{ harmonisch} \end{array}$$

$$\leadsto g(\omega, \theta) = - \int_{|y|<1} q(y) \nabla_y \delta \cdot \nabla_y u_\theta(y) dy$$

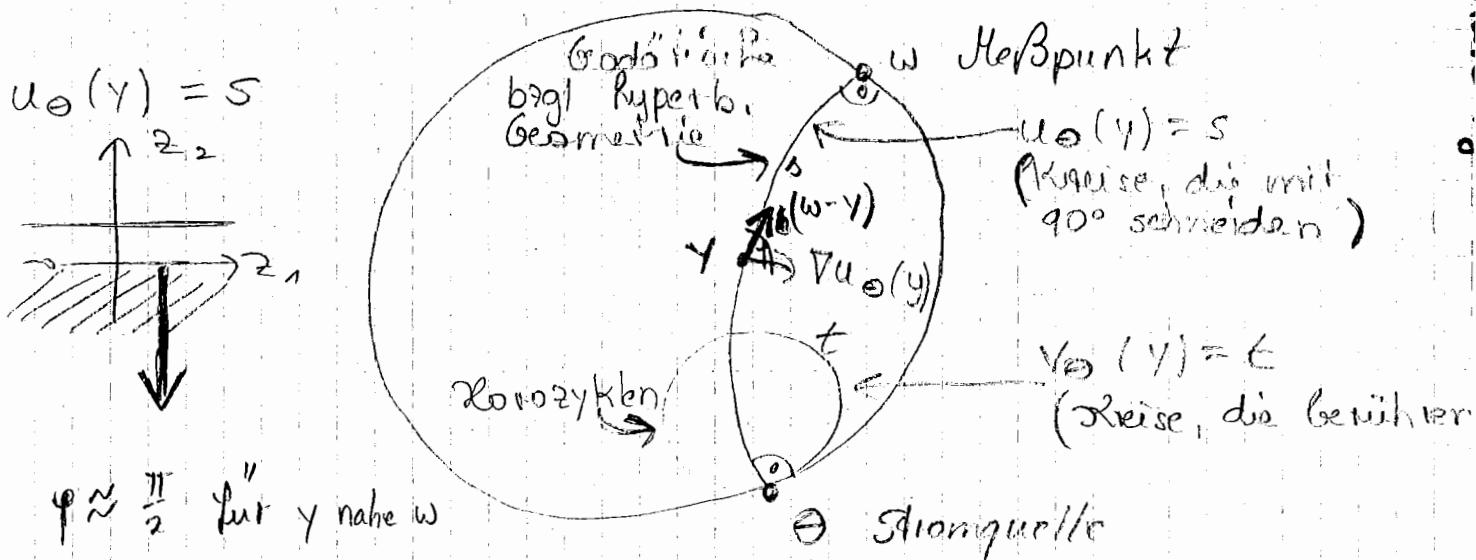
$K(\omega, \theta, y) \in C^\infty$  in  $|y|<1$   
 hier  $\uparrow$  schlecht

/\* Integralgleichung für  $q$  \*/

$$\nabla_y \delta(\omega - y) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\omega - y}{|\omega - y|^2}$$

$$\leadsto g(\omega, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{|y|<1} q(y) \frac{\nabla u_\theta(y) \cdot (\omega - y)}{|\omega - y|^2} dy$$

/\* interpretiere geometrisch \*/



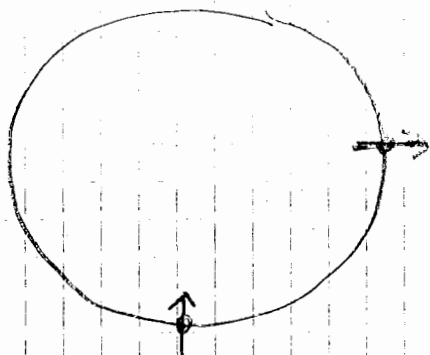
Linienintegral entlang  $u_\theta(x) = w$  ist keine Approximation an Integralgleichung.

/\* Erfolge der Methode bescheiden \*/



# Ergänzung zur Impedanztomographie

6.7.92



Elektroden

Für jedes Paar ist Spannungsverteilung am Rand gegeben.

$$\operatorname{div}(a \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega$$

$$a \frac{\partial u}{\partial \nu} = j \text{ auf } \partial \Omega$$

$$u = \Lambda_a j \text{ bekannt } \forall j$$

ges.:  $a$ !

Lösung des direkten Problems für  $a=1$ :

$$u(x) = \sum c_n \dots, \quad x = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$u(x) = \sum c_n e^{in\varphi} r^{|n|}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| c_n e^{in\varphi}$$

↑ Normalableitung

$$|n| c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j e^{-in\psi} d\psi$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} r^{|n|} e^{in(\varphi - \psi)} r^{|n|} d\psi \quad \leftarrow n \in \mathbb{Z}!$$

↑ eigentlich darf nicht vertauscht werden, aber stellen sich raus, daß es stimmt!

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n (e^{in(\varphi - \psi)} + e^{-in(\varphi - \psi)}) d\psi$$

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -\log(1-z) \text{ für } |z| < 1 \Rightarrow \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j (\log(1 - r e^{i(\varphi - \psi)}) + \log(1 - r e^{-i(\varphi - \psi)})) d\psi$$

$$z = r e^{i(\varphi - \psi)}, \quad |r| < 1 \quad \log z$$

$$\left[ \log z = \log |z| + i \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j \log |1 - re^{i(\varphi-\psi)}| d\psi \cdot 2$$

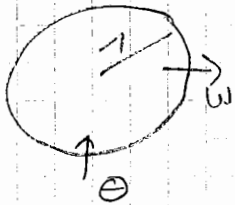
gleich reell, log muß reell werden

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j \log |e^{i\varphi} - re^{i\psi}| d\psi$$

↑ multipliziert mit Zahl von Betrag in Beträgen

$$\leadsto u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{|y|=1} j(y) \log |y-x| dy$$

Fundamentalslg der Laplace'schen  
Gleich. in 2 Dimensionen



$$j(y) = \delta_\theta - \delta_\omega$$

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int (\log |\theta-x| - \log |\omega-x|)$$

$$= \frac{1}{\pi} \log \frac{|\omega-x|}{|\theta-x|} = u_{\theta, \omega}(x)$$

/\* so einfach ist das \*/

letztes Mal: (Quellen aus. Punkten lassen)

$$\int q \nabla u \otimes \nabla \delta dx = \text{bekannt}$$

↓ nur in der Nähe der Quelle ungleich Null  
 $u_\theta$  gibt kaum Information über  $q$  weit  
 weg vom den Elektroden

$$u_\theta: \text{Winn } \theta_{\theta, \omega}$$

Leitfähigkeiten:  $\frac{mS}{cm}$  S: Sievert  $\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$

Blut: 6,7

Leber: 2,8

Muskel: 8,0 / 0,6  
longitudinal / transversal

Lunge: ~~1,0~~ 1,0 / ~~0,4~~ 0,4  
ausatmend / einatmend

Zinn: 3,5 / 1,5  
grau / weiß

Fett: 0,36

Knochen: 0,06

Verbesserung des Modells:

$$\operatorname{div} (A \nabla u) = 0 \quad A = (a_{ij}) \quad \text{in } \Omega$$

$$A \nu \cdot \nabla u = j \quad \text{auf } \partial \Omega$$

Inverses Problem:

Sei für jedes  $j$   $\Lambda_A j = u$  auf  $\partial \Omega$  bekannt  
zu bestimmen:  $A!$  (Matrix)

Eindeutig lösbar? Nein!

Gegenbeispiel:

$\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $\partial \Omega$  punktweise fest

$$y = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$y = \phi(x)$$

$$\nabla_x u = y^T \nabla_y u$$

$$u \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A \nabla u) \cdot v \, dx = 0$$

$\Omega$  " part. Integr., Randterme verschw.

$$- \int_{\Omega} A \nabla_x u \cdot \nabla_x v$$

$\Omega$  " Transformation

$$- \int_{\Omega} A y^T \nabla_y u \, y^T \nabla_y v \frac{dy}{|J|}$$

$\Omega$  "

$$- \int_{\Omega} \underbrace{\frac{y A y^T}{|J|}}_{=: B} \nabla_y u \cdot \nabla_y v \, dy$$

"

$$- \int_{\Omega} B \nabla_y u \cdot \nabla_y v \, dy$$

" part.

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(B \nabla u)) \cdot v \, dy$$

$\Omega$   
"  $u$  löst mit  $A \Rightarrow u$  löst mit  $B$  "

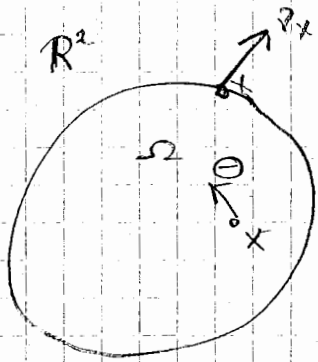
Also löst  $u$  mit  $\operatorname{div}(A \nabla u) = 0$  auch  
 $\operatorname{div}(B \nabla u) = 0 \Rightarrow$

Mehrdeutigkeit des inversen Problems.

Vermutung: einzige Mehrdeutigkeit!!!

d.R. das inverse Problem ist eindeutig lösbar  
bis auf Verzerrungen  $y = \phi(x)$ .

### §3 Ein inverses Transportproblem:



$\Omega$  streng konvex

Dichte  $u(x, \theta)$

$\{*$  Dichte der Teilchen, die an der Stelle  $x$  in Richtung  $\theta$  laufen  $\}$

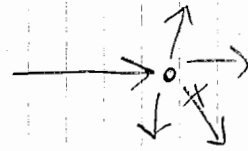
$a(x)$  Dämpfung

$$I_0 \xrightarrow{\quad} I_0 e^{-\int a dx}$$

$\uparrow$  # Teilchen zu Beginn des Durchlaufs  $\uparrow$  # Teilchenverlust

$b(x, \theta)$  Streuterm, d.R.

$\{*$  Wahrscheinlichkeit mit der ein Teilchen in  $x$  in Richtung  $\theta$  gestreut wird  $\}$



$f(x)$  Quellterm

$\{*$  Anzahl entstehender Teilchen  $\}$

Es gilt:

$$\theta \cdot \nabla_x u(x, \theta) + a(x) u(x, \theta) =$$

$$\int_{S^1} b(x, \theta - \omega) u(x, \omega) d\omega + f(x) \quad \text{in } \Omega$$

$\{*$  Von außen keine Teile hereinkommen  $\}$

einfallende Richtung

$$u(x, \theta) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \quad \theta \cdot \nu(x) < 0$$

$u$  eindeutig bestimmt.

Inverses Problem:

$u(x, \theta)$  bekannt für alle  $x \in \partial\Omega, \theta \in S^1$ .

Bestimme  $a, b, f$

*/\* viel schwieriger als direktes Problem \*/*

Vereinfachtes Problem:

$b = 0$  */\* keine Streuung \*/*

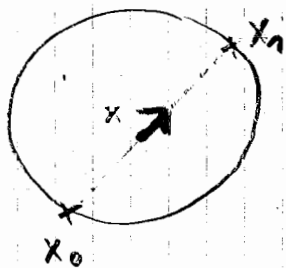
$a$  bekannt

Bestimme  $f$ .

*/\*  $\nabla = \nabla_x$  \*/*

$$\Theta \nabla u(x, \Theta) + a(x) \cdot u(x, \Theta) = f(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x, \Theta) = u_0(x, \Theta) \quad x \in \partial\Omega, \Theta \in S^1$$



*/\*  $x_0, x_1$  eindeutig wg.  $\Omega$  konvex \*/*

$$u_\Theta(t) := u(x_0 + t\Theta, \Theta)$$

*↑ auf Gerade*

$$a_\Theta(t) := a(x_0 + t\Theta)$$

$$f_\Theta(t) := f(x_0 + t\Theta)$$

$$\frac{d}{dt} u_\Theta(t) + a_\Theta(t) \cdot u_\Theta(t) = f_\Theta(t) \quad \leftarrow \text{gew. Dgl.}$$

$$= \Theta \nabla u(x, \Theta)$$

Integrierender Faktor

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\int_0^t a_\Theta(s) ds} u_\Theta(t) \right) = f_\Theta(t) \cdot e^{-\int_0^t a_\Theta(s) ds}$$

$$e^{-\int_0^t a_\Theta(s) ds} u_\Theta(t) = u_\Theta(0) + \int_0^t f_\Theta(\tau) e^{-\int_0^\tau a_\Theta(s) ds} d\tau$$

$$u_\Theta(t) = e^{\int_0^t a_\Theta(s) ds} \left( u_\Theta(0) + \int_0^t f_\Theta(\tau) e^{-\int_0^\tau a_\Theta(s) ds} d\tau \right)$$

Wähle  $t$  so, daß  $x_0 + t \cdot \Theta = x_1$

$$u_\theta(x_1) = e^{-\int_{x_0}^{x_1} a \, ds}$$

$$x = x_0 + \tau \theta$$

$$u(x_1, \theta) = e^{-\int_{x_0}^{x_1} a \, ds} \left( u(x_0, \theta) + \int_{x_0}^{x_1} f(x) e^{\int_{x_0}^x a \, ds} dx \right) \Rightarrow$$

$$\bullet u(x_1, \theta) - e^{-\int_{x_0}^{x_1} a \, ds} u(x_0, \theta) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) e^{-\int_x^{x_1} a \, ds} dx \quad \leftarrow \text{bekannt } \forall x_0, x_1, \theta$$

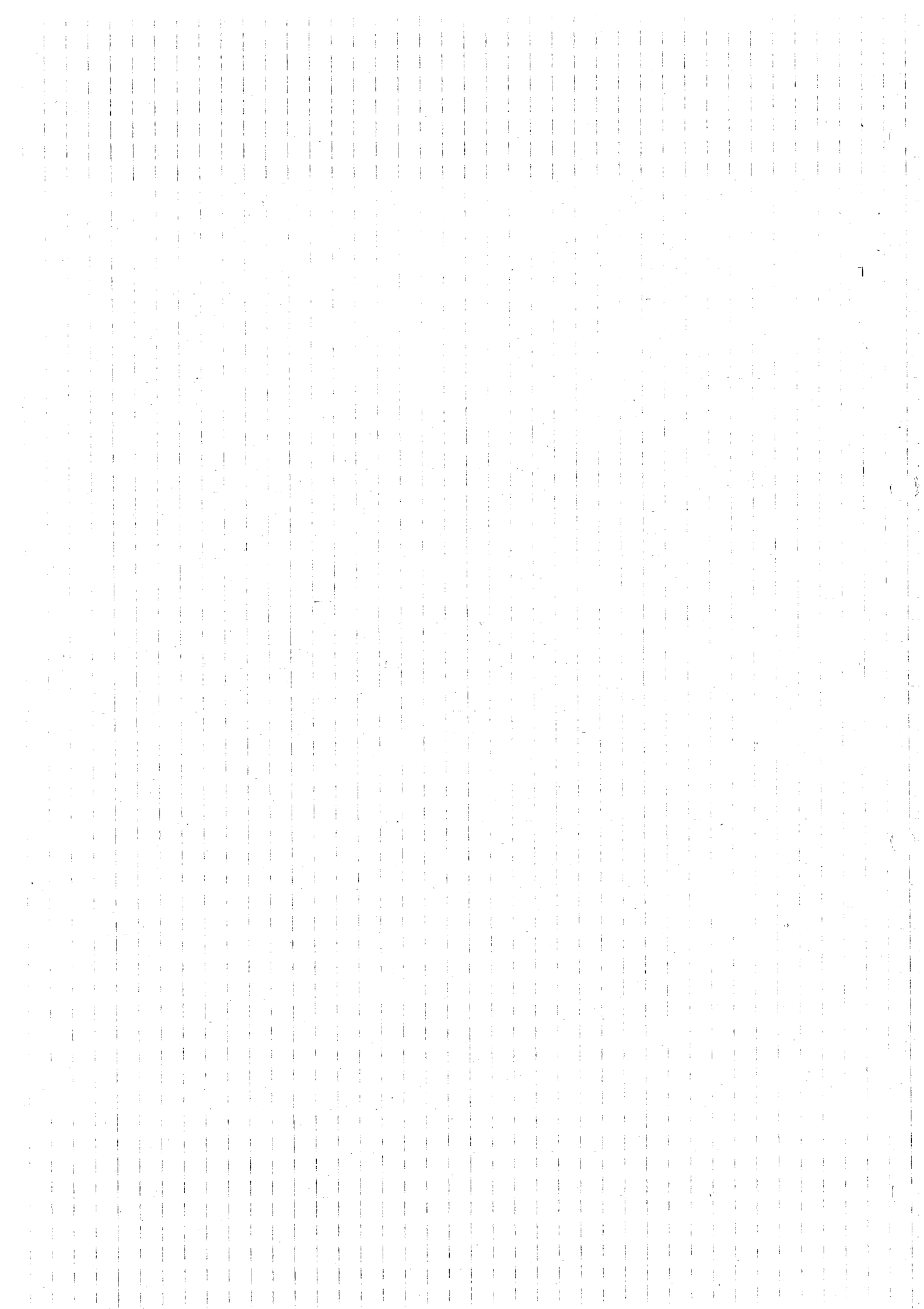
$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(x) e^{-\int_x^{x_1} a \, ds} dx}_{\text{gedämpfte Radontransformation}}$$

gedämpfte Radontransformation

- auf Integral-geom. Problem reduziert

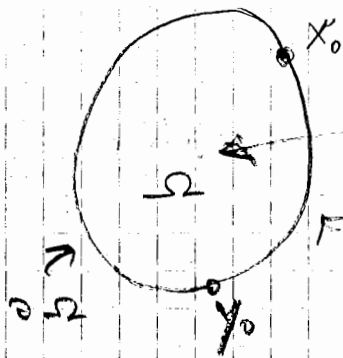
$$(R_a f)(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) \cdot e^{-D_a(x, \theta^+)} dx$$

$$(D_a)(x, \theta) = \int_0^\infty a(x + t \cdot \theta) dt$$





## §4 Ein parabolisches inverses Problem



$$a(x)u_t = \Delta u + \delta(x-x_0)\delta(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad /* \text{ Gebiet isoliert } */$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Inverses Problem

Für  $x_0, y_0 \in \partial\Omega$  ist  $u(y_0, t) = f(x_0, y_0, t)$  gek.,  $t \geq 0$   
Bestimme  $a$ !!

Erinnerungen

1) Laplace-Transformation

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt =: F(s)$$

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)$$

↑ oben +, weiß er nicht

2) Green'sche Funktion von  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial\Omega$

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

/\* die Lsg, deren Mittelwert 0 und die am Rand 0 \*/

$$f(x) = \delta(x-x_0), \quad x_0 \in \bar{\Omega} \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = G(x, x_0) \quad /* \text{ alles ohne Beweis } */$$

Laplace - Transformation der Dgl nach  $t$ :

$$\mathcal{L}(a(x)u_t - \Delta u - \delta(x-x_0) \delta(t)) = 0$$

$$\leadsto a(x) \cdot \mathcal{L}(u_t) - \Delta \mathcal{L}u - \delta(x-x_0) \int_0^\infty e^{-st} \delta(t) dt = 0$$

$$U(x, s) = (\mathcal{L}u(x, \cdot))(s) =$$

$$a(x) \cdot U(x, s) - \Delta_x U(x, s) - \delta(x-x_0) \cdot 1 = 0$$

Annahme:  $|u(x, t)| \leq C \cdot e^{t s_0}$ ,  $s_0 < 0$

/ \* kann man zeigen \* /

$$\leadsto U(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt \quad \text{ist f\u00fcr } \operatorname{Re} s > s_0 \text{ analytisch.}$$

/\* ganz primitive FT \*/

Entwicklung um  $s = 0$ :

$$U(x, s) = U_0(x) + s U_1(x) + s^2 U_2(x, s)$$

analytische beschr. Fkt

$$a(x)(U_0 + s U_1 + s^2 U_2) - \Delta U_0 - s \Delta U_1 - s^2 \Delta U_2 - \delta(x-x_0) = 0$$

Koeffizientenvergleich:

$$s^0: -\Delta U_0(x) = \delta(x-x_0)$$

$$s^1: a U_0 - \Delta U_1 = 0 \quad \text{d.h.} \quad \Delta U_1 = a U_0$$

Randwerte von  $U_0$  und  $U_1$ :

$$y_0 \in \partial \Omega: U(y_0, s) = F(x_0, y_0, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x_0, y_0, t) dt$$

$\uparrow$  damit auch bekannt  $\uparrow$  bekannt

$$\leadsto \left. \begin{aligned} U_0(y_0) &= F(x_0, y_0) \\ U_1(y_0) &= \frac{\partial}{\partial s} F(x_0, y_0, 0) \end{aligned} \right\} \text{bekannt}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \nu} = \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial \Omega \quad (\text{wg f\u00fcr } u \text{ n\u00f6tig})$$

$$U_0(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \delta(x-x_0) dy = G(x, x_0)$$

$$U_1(x) = - \int_{\Omega} G(x, y) a(y) U_0(y) dy$$

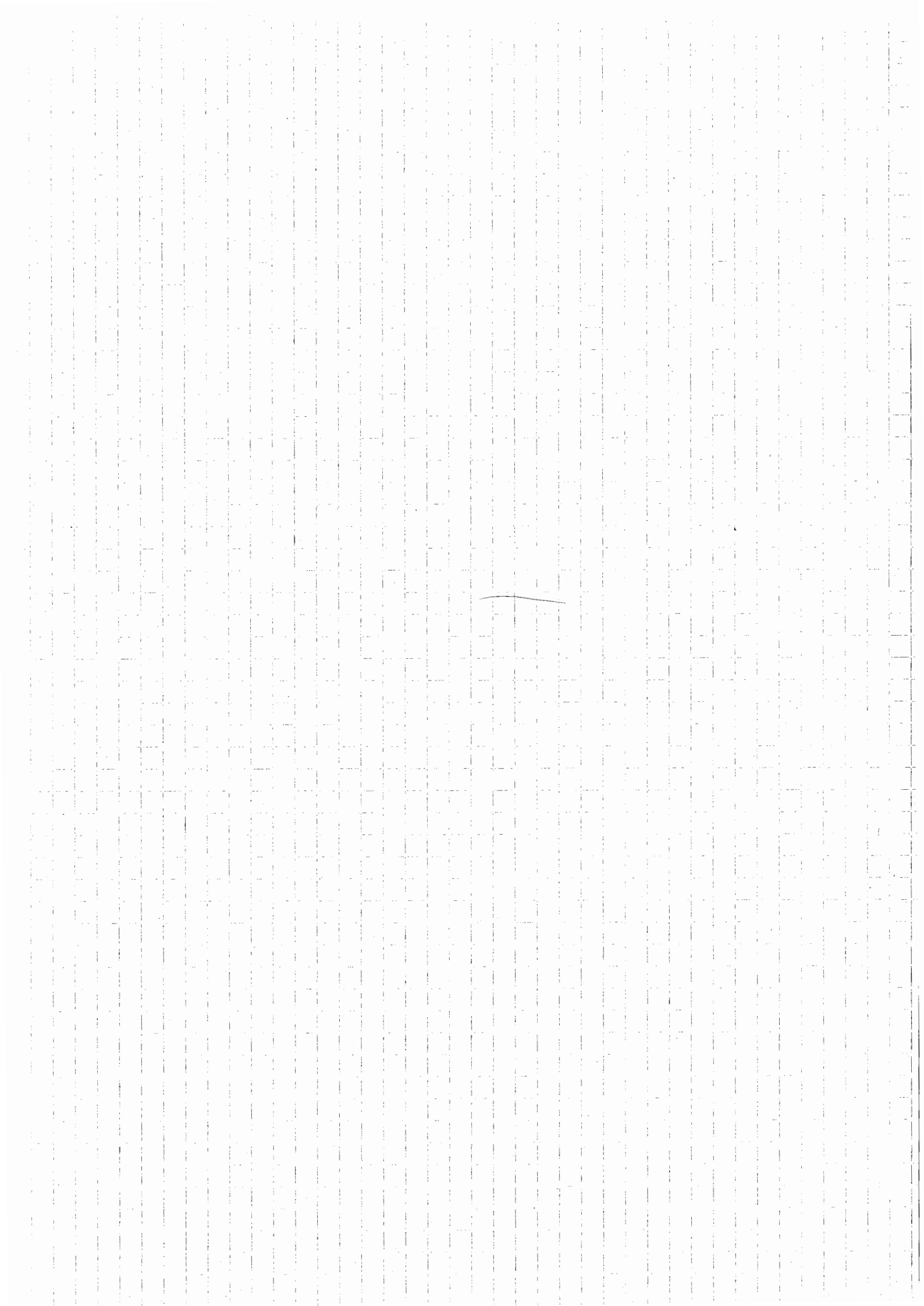
$$= - \int_{\Omega} G(x, y) a(y) G(y, x_0) dy$$

$$u_1(y_0) = - \int_{\Omega} G(y_0, y) G(y, x_0) a(y) dy$$

$\uparrow$   
bekannt

Integralgleichung, linear, für  $a$ .

/ \* nicht einfach, aber lösbar \* /



# §5 Inverse hyperbolische Probleme

Wdh. aus Part Dgl an:

$$u_{tt} = \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u$$

Hyperbolisch, falls  $A = a_{jk}$  im  $\Omega$  positiv definit.

Charakteristische quadratische Form:

$t$  eine Variable schon besonders ausgezeichnet,  $t \neq 1$

$$Q(\tau, \xi) = \tau^2 - \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \xi_i \xi_j$$

Charakteristische Mannigfaltigkeit

$$t = \psi(x) : \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 1 \leftarrow \text{Ableitung nach } t$$

Eikonal-Gleichung

Charakteristiken der Eikonalgleichung:

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (x, p) \text{ Streifen}$$

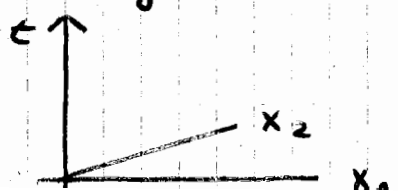
Parameter:  $t$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = 2 \cdot \sum_{j=1}^m a_{ij} p_j, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \sum_{e,j=1}^m \frac{\partial a_{ej}}{\partial x_i} p_e$$

↑ charakteristischen Gleichungen

Konstruktion der konoidalen

Lösung der Eikonalgleichung:



charakteristische Konoid  
↑  
Kezel

Löse charakteristischen Gleichungen unter

$$x(0) = x_0 \quad p(0) = \Theta$$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x_0) \Theta_i \Theta_j = 1$$

Lösung des charakteristischen Systems mit diesen Anfangswerten:

$$x(t, x_0, \Theta)$$

$x(t, x_0, \Theta)$  bildet Integralfläche, wenn  $\Theta$  ...

$$\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x_0) \Theta_i \Theta_j = 1 \text{ durchläuft.}$$

Beispiele

1)  $u_{tt} = \Delta u$

$$\frac{dx}{dt} = 2p$$

$$\frac{dp}{dt} = \sigma$$

$$|\Theta| = 1$$

$$p = \Theta$$

$$x = 2t\Theta + x_0$$

↑ durch ungeschickte Parametrisierung

$$|x - x_0| = 2t$$

charakteristisches Konoid

NIER Kegel

2)  $u_{tt} = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$a_{i,j}$  konstant

$$\frac{dp}{dt} = \sigma$$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{i,j} \Theta_i \Theta_j = 1 = (\Theta, \mathbb{A} \Theta)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\mathbb{A}p = 2\mathbb{A}\Theta$$

$$x(t) = 2\mathbb{A}\Theta t + x_0$$

Charakteristisches Konoid  
Regel bzgl der Metrik  $\mathbb{A}^{-1}$

$$(x - x_0) = 2\mathbb{A}\Theta t \rightsquigarrow \mathbb{A}^{-1}(x - x_0) = 2\Theta t \rightsquigarrow$$

$$((x - x_0), \mathbb{A}^{-1}(x - x_0)) = 4t^2 (\Theta, \mathbb{A}\Theta) = 4t^2$$

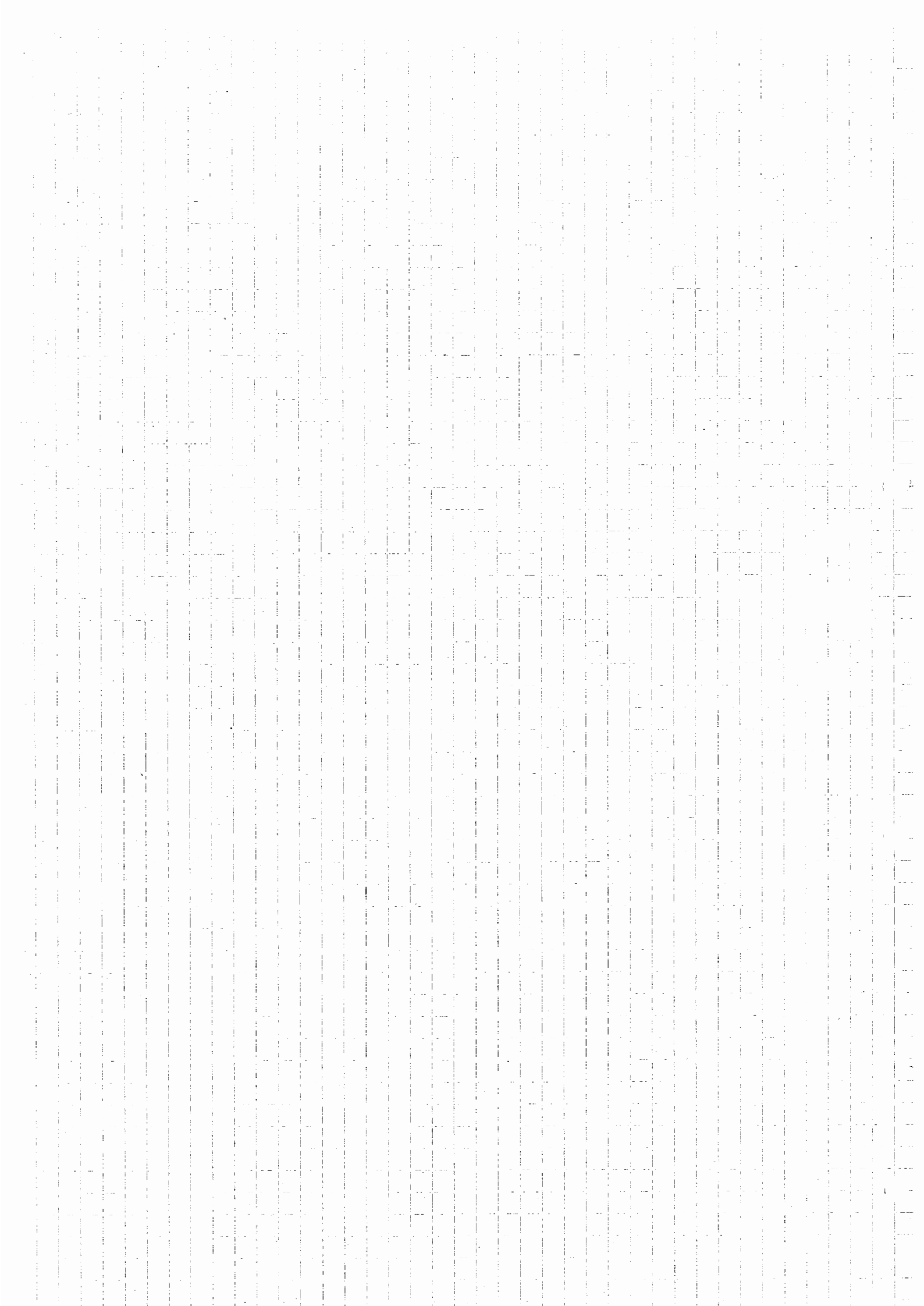
$$3) \quad u_{tt} = c^2(x) \Delta u$$

$$\frac{dx}{dt} = 2c^2 p$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -2 \cdot \frac{\partial c^2}{\partial x_i} |p|^2$$

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \Theta \quad \text{mit} \quad c^2|\Theta|^2 = 1$$

$x(t, x_0, \Theta)$  erzeugt Monoid





Inverses Problem für Realisierungen einer

niedrigen Ableitung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \Delta u + q(x)u + \# \delta(x-x_0) \delta(t) \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$g(x_0, x_1, t) = u(x_1, t)$  bekannt für  $(x_0, x_1) \in S$ ,  $t \in T$

Problem: Finde  $q$ !

Vorbereitungen:

1)  $\delta$ -Funktion

$\delta$  in  $\mathbb{R}^n$ : /\* Distribution \*/

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(x-x_0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+x') \delta(x') dx' = f(x_0)$$

/\* als wäre  $\delta$  Fkt \*/

$\delta$ -Funktion in  $\mathbb{R}^1$ :

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(t - \Phi(x)) dx = \int_{\Phi(x)=t} f(x) \frac{d\delta(x)}{|\nabla_x \Phi|}$$

$\Phi(x) = t$

Beweis:  $n=2$

$$u_1 = \Phi(x_1, x_2)$$

$$u_2 = x_2$$

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \Phi_{x_1} \neq 0$$

↑  
(nehme das an)

$$x_1 = \Psi(u_1, u_2)$$

$$x_2 = u_2$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \Psi_{u_1}$$

$$\int f(x) \delta(t - \Phi(x)) dx = \int \int f(\Psi(u_1, u_2), u_2) \delta(t - u_1) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} du_1 du_2$$

$$= \int \int f(\Psi(u_1, u_2), u_2) \cdot \delta(t - u_1) \underbrace{\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right|}_{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \right|} du_1 du_2$$

$$= \int f(\Psi(t, u_1), u_2) \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \right| du_2$$

Jetzt berechne

$$\int_{\phi(x)=t} f(x) \frac{d\phi(x)}{|\nabla_x \phi|} = \int f(\Psi(u_1, u_2), u_2) (1 + \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \right|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{du_2}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2}}$$

$$\phi(\Psi(u_1, u_2), u_2) = u_1$$

Differenzieren: (nach  $u_1$ )

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} = 1$$

Differenzieren: (nach  $u_2$ )

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{1 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2} = \frac{1 + \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}\right)^2}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2} =$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^{-2} \quad (\text{multi mit } \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^{-2})$$

$$= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_{\phi(x)=t} f(x) \frac{d\phi(x)}{|\nabla_x \phi|} = \int f(\Psi(u_1, u_2), u_2) \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \right| du_2$$

2. Vorbereitung : Kirchhoff'sche Formel im  $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Vorlesung part. Dgl :

Die eindeutige Lösung lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{f(y, t-|x-y|)}{|x-y|} dy$$

gesetzt zum inv. Problem:

Wende Rückhoff an auf ~~u(x,t) = q(x)u(x,t) + \delta(x-x\_0)\delta(t)~~

$$f(x,t) = q(x)u(x,t) + \delta(x-x_0)\delta(t)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{q(y)u(y, t-|x-y|) + \delta(y-x_0)\delta(t-|x-y|)}{|x-y|} dy$$

$$= \frac{\delta(t-|x-x_0|)}{|x_0-x_0|} + \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{q(y)u(y, t-|x-y|)}{|x-y|} dy$$

für  $|x-x_0| \leq t$

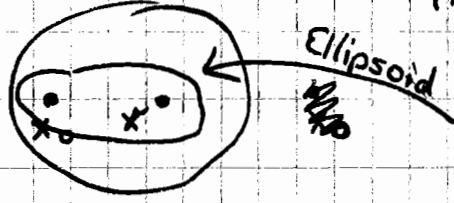
Linearisierung (Born-Näherung):

$$u_0(x,t) = \frac{\delta(t-(x-x_0))}{x-x_0}$$

$$u = u_0 + O(q)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{q(y)}{|x-y|} u_0(y, t-|x-y|) dy + O(q^2)$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} q(y) \frac{\delta(t-|y-x_0|-|x-y|)}{|x-y||y-x_0|} dy$$



$$|y-x_0| + |x-y| = t$$

Träger der  $\delta$ -Funktion

Wash Lemma:

$$u_1(x_1, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x_1 - y| + |x_0 - y| = t} \frac{q(y)}{|x_1 - y| |y - x_0|} \frac{d\omega(y)}{|\nabla_y (|y - x_0| + |y - x_1|)|}$$

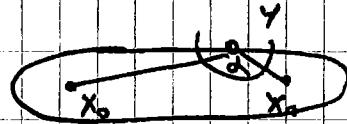
ist gut + Problem der Integralgeometrie +

$$|\nabla_y (|x_0 - y| + |x_1 - y|)| = \left| \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|} + \frac{x_1 - y}{|x_1 - y|} \right|$$

$$= |a_0 + a_1| \quad a_i \text{ Einheitsvektoren}$$

$$= \sqrt{2 + 2 \cos d} \quad \cos d = a_0 \cdot a_1$$

$$= \sqrt{2(1 + \cos d)}$$



cosinussatz:

$$\cos(d) = \frac{|x_0 - y|^2 + |y - x_1|^2 - |x_0 - x_1|^2}{2|x_0 - y| |y - x_1|}$$

$$1 + \cos(d) = \frac{2 \cdot |x_0 - y| |y - x_1| + |x_0 - y|^2 + |y - x_1|^2 - |x_0 - x_1|^2}{2 \cdot |x_0 - y| |y - x_1|}$$

$$= \frac{(|x_0 - y| + |y - x_1|)^2 - |x_0 - x_1|^2}{2|x_0 - y| |y - x_1|}$$

$$= \frac{t^2 - |x_0 - x_1|^2}{2|x_0 - y| |y - x_1|} \quad \text{wg auf Ellipse}$$

$$\Rightarrow u_0(x_1, t) = \frac{1}{4\pi \sqrt{t^2 - |x_0 - x_1|^2}} \int_{|x_0 - y| + |x_1 - y| = t} \frac{q(y)}{\sqrt{|x_0 - y| \cdot |x_1 - y|}} \quad (\text{Romanov})$$

$$|\nabla_y (|x_0 - y| + |x_1 - y|)| = \sqrt{\frac{t^2 - |x_0 - x_1|^2}{|x_0 - y| |x_1 - y|}}$$

## Beispiel

3

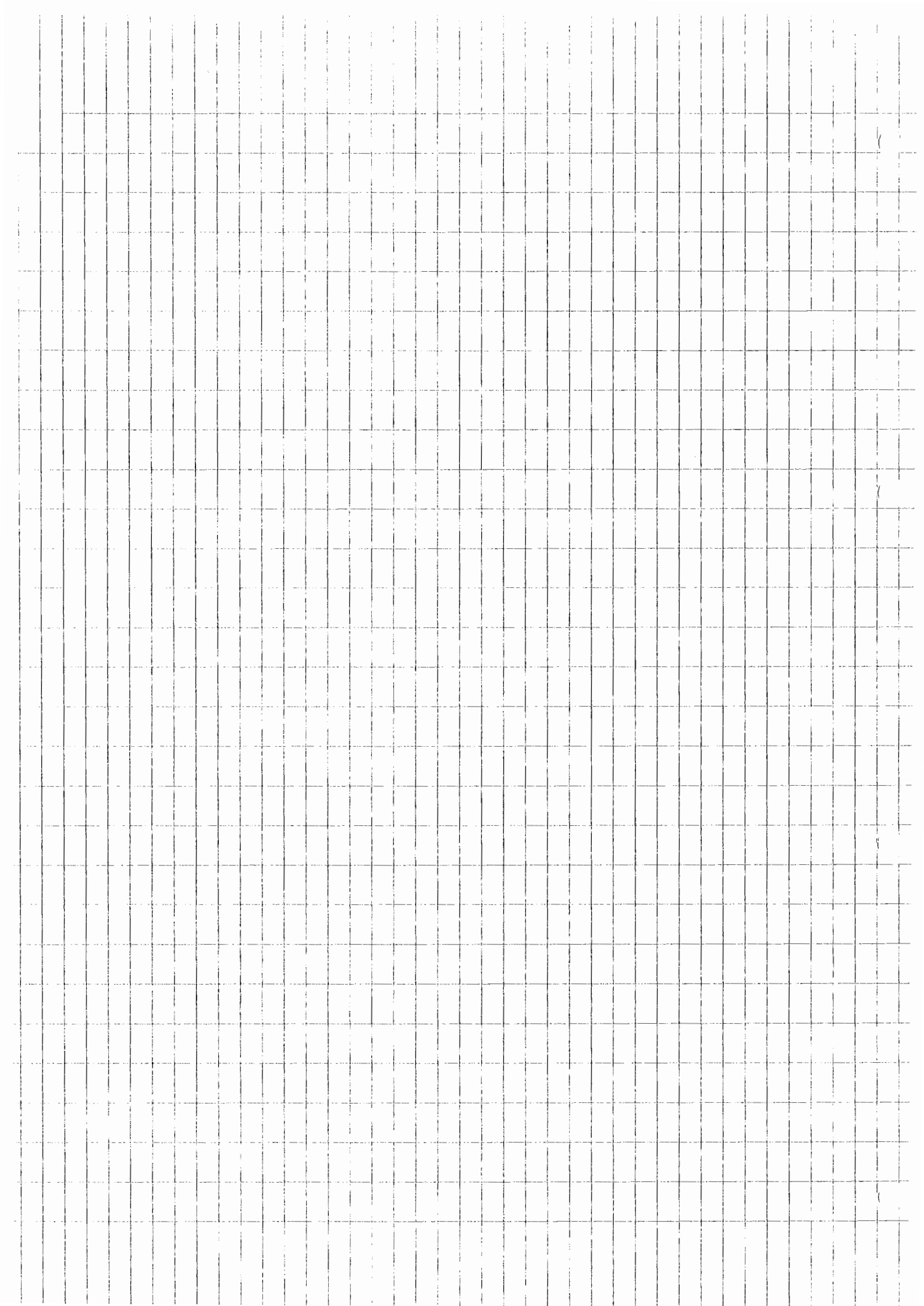
Zero - offset - exploration

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$$

↑  
Eidobefläche

$$u_1(x_0, \epsilon) = \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int_{|x-y|=\frac{1}{2}\epsilon} q(y) \, d\omega(y)$$

Integrale über Halbkugeln beliebiger Radien  $\epsilon > |x_0 - x_1| = 0$   
mit Mittelpkt auf der Ebene  $x_3 = 0$  (Eidobefläche)



# Zusammenfassung §1

## Gelfand - Leitan - Theorie

§1 Selbstadjungierte Eigenwertprobleme bei gew. Dgl  
im endl. Intervall

$$Lu = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u'$$

$$p_j \in C^{n-j}[a, b], \quad p_0(x) \neq 0 \text{ auf } [a, b]$$

$$R_k u = \sum_{j=1}^m M_{jk} u^{(j-1)}(a) + N_{jk} u^{(j-1)}(b), \quad k=1, \dots, m$$

Eigenwertproblem: (1)

$$Lu = \lambda u \text{ in } [a, b], \quad Ru = 0 \text{ (d.h. } R_k u = 0 \forall k \in \{1, \dots, m\})$$

Def.:

Für  $\lambda$ , für das Problem (1) eine Lösung  $u$  existiert,  $u \in C^n \setminus \{0\}$ ,  
heißt Eigenwert und  $u$  heißt zugehörige Eigenfunktion.

Def.:

(1) heißt selbstadjungiert, wenn für alle  $u, v \in C^m$   
mit  $Ru = R(v) = 0$  gilt:  $(Lu, v)_{L_2} = (u, Lv)_{L_2}$

Inhomogenes Problem: (2)

$$Lu = \lambda u + f, \quad \lambda \text{ konstant}, \quad Ru = 0$$

Satz (Green'sche Funktion)

Sei  $\lambda$  kein Eigenwert von (1). Dann gibt es eine  
Funktion  $G_\lambda(x, y)$  mit folgenden Eigenschaften:

1)  $\frac{\partial^k G_\lambda(x, y)}{\partial x^k}$  stetig für  $k=0, \dots, m-2$

Für  $k=m-1$  hat man Stetigkeit nur für  $x \neq y$

und es gilt:

$$\frac{\partial^{m-1} G_\lambda(x+0, x)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} G_\lambda(x-0, x)}{\partial x^{m-1}} = \frac{1}{p_0(x)}$$

2)  $y$  fest,  $u(x) := G_e(x, y)$ . Dann gilt für  $x \neq y$   
 $Lu = \lambda u$ ,  $Ru = 0$

3) Die Funktion  $u(x) := \int_a^b G_e(x, y) f(y) dy$  löst (2)

4) Ist (1) selbstadjungiert und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$G_e(x, y) = \overline{G_e(y, x)}$$

Situation:

Sei  $\lambda = 0$  kein Eigenwert von (1) und

$G(x, y)$  Green'sche Funktion zu  $\lambda = 0$

$$(Gu)(x) := \underbrace{\int_a^b G(x, y) u(y) dy}_{\text{löst (2)}}$$

$$(1) \Leftrightarrow u = \lambda Gu$$

$$\lambda \text{ Eigenwert von (1)} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ Eigenwert von } G$$

Satz 2:

Ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte. Die Eigenwerte sind alle reell und häufen sich nur im unendlichen. Zu jedem Eigenwert gibt es höchstens  $m$  linear unabhängige Eigenfunktionen, und Eigenfunktionen zu versch. Eigenwerten sind orthogonal in  $L_2(a, b)$

Def.:

Ein linearer beschränkter Operator  $T$  heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.



Lemma:

$M \subset L_2(a, b)$  relativ kompakt  $\Leftrightarrow$

i)  $M$  ist beschränkt

ii)  $M$  ist im quadratischen Mittel gleichmäßig stetig, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall f \in M : |h| < \delta \Rightarrow \|f - f_h\| < \varepsilon$  mit

$$f_h = \begin{cases} f(x+h) & x+h \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 3

ii) (1) selbstadjungiert. Dann ist  $\mathcal{G}$  ein kompakter  
hermitescher Operator in  $L_2(a, b)$

Satz 4

ii)  $\mathcal{G}$  ein linearer stetiger hermitescher Operator.

Dann gilt:  $\|\mathcal{G}\| = \sup_{\|u\|=1} |(\mathcal{G}u, u)|$

Satz 5

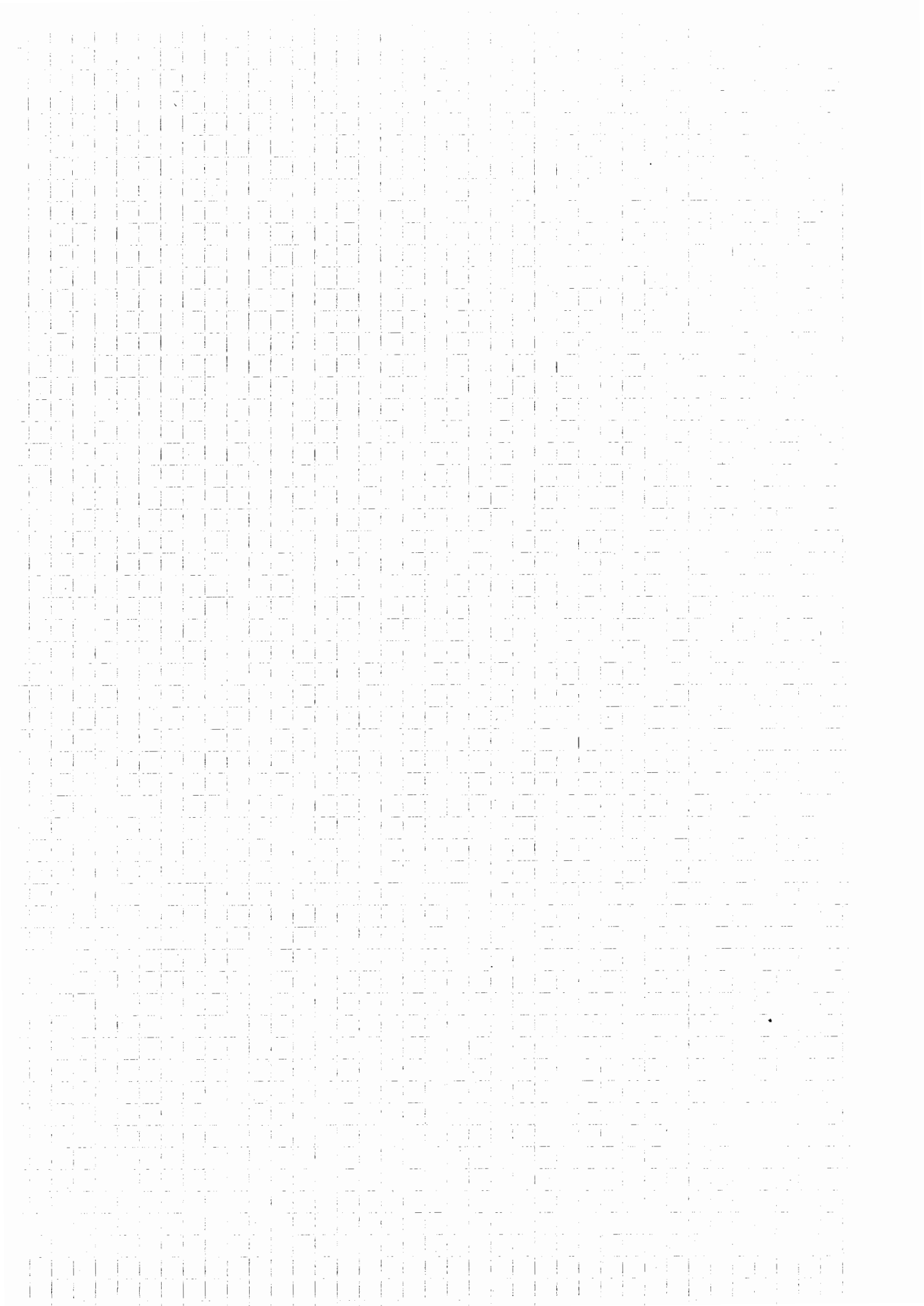
i) kompakter, hermitescher Operator. Dann ist entweder  
 $\|\mathcal{G}\|$  oder  $-\|\mathcal{G}\|$  Eigenwert von  $\mathcal{G}$

Satz 6

ii) (1) selbstadjungiert. Dann hat (1) abzählbar

unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_n$  mit  $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots$

und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden ein  
vollständiges orthonormales System in  $L_2(a, b)$



## Zusammenfassung §2

### Gelfand - Levitan - Theorie

§2: Die asymptotische Lösung von Eigenwertproblemen

Sturm - Liouville - Problem:

$$-u'' + qu = \lambda u \quad , \quad q \in C[a, b]$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

Eigenwerte:  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$

Eigenfunktionen:  $u_0, u_1, u_2, \dots$

Satz 2.1 (Maximum-Minimum-Prinzip)

Sei  $Lu = \lambda u$ ,  $Ru = 0$  ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem mit Eigenwerten  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ . Dann gilt:

$$\lambda_k = \underset{\substack{V \\ \dim V = k}}{\text{Max}} \quad \underset{\substack{\|u\|=1 \\ Ru=0 \\ u \perp V}}{\text{Min}} \quad (Lu, u)$$

Vergleichssatz /\* WICHTIG \*/

Seien  $L_1 u = \lambda u$ ,  $L_2 u = \lambda u$  zusammen mit der Randbedingung  $Ru = 0$  selbstadjungierte Eigenwertprobleme. Das erste Problem habe die Eigenwerte

$\lambda_0^1 \leq \lambda_1^1 \leq \dots$  und es sei  $(L_1 u, u) \leq (L_2 u, u)$

$\forall u$  mit  $Ru = 0$ . Dann hat  $L_2$  Eigenwerte

$\lambda_0^2 \leq \lambda_1^2 \leq \dots$  mit  $\lambda_k^1 \leq \lambda_k^2$ ,  $k = 0, 1, \dots$

### Satz 2.3

Sei  $q \in C^0[a, b]$ . Dann gilt für  $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + O(1)$$

$O(1)$  ist beschränkte Funktion von  $k$

Ist sogar  $q \in C^2[a, b]$ , so gilt für  $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x) dx + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  verschmälert Funktion mit  $O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{M}{k^2}$ .

### Bemerkung

$q \in C^4[a, b]$

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2 + \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x) dx + \frac{c}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

$$c = \frac{1}{\pi(b-a)} \int_a^b q^2 + q'' dx$$

### Satz 2.4

Sei  $q \in C[a, b]$ . Dann gilt für die (normierte)  $k$ 'te Eigenfunktion  $u_k$  von

$$-u'' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

die asymptotische Beziehung

$$|u_k(a)| \underset{k \rightarrow \infty}{=} \lambda_k^{-1/2} \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} + O(\lambda_k^{-1/2}) \right)$$



# RINGBUCH

## Inhalt

ВАННА ЗИРАГОЗ, МОСКВА

### Stundenplan

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag



Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 1, Abgabe: 11.05.1992, 15.00 Uhr, in Kasten 1

**Aufgabe 1: (4 Punkte)**

Sei  $A$  eine reelle symmetrische Matrix. Der Lanczos - Algorithmus für  $A$  lasse sich bis zum Index  $i$  durchführen und breche dann mit  $d_i = 0$  ab. Sei

$v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $E \omega \lambda$  von  $B$   
 $\Rightarrow Bv = \lambda v \Rightarrow SBv = S\lambda v \Rightarrow$   
 $TSv = \lambda Sv \Rightarrow Sv \in \text{EV}(\lambda) \Rightarrow \omega \lambda_i =$   
 $Sv \neq 0$  wj.  $\|Sv\| = \max$

$$T_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & \beta_1 & \dots & & \\ & & \dots & & \\ & & & \beta_{i-1} & \\ & & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

$B = S^{-1} A S$   
 $\chi_B = \chi_A$   $\begin{matrix} A_{nn} & B_{mm} \\ S_{nm} \end{matrix}$   
 $SB = TS \Rightarrow$   
 $\{E \omega \lambda_i\} \subset \{E \omega \lambda_j\}$

Zeigen Sie: Alle Eigenwerte von  $T_i$  sind auch Eigenwerte von  $A$ .

**Aufgabe 2: (2 Punkte)**

Sei

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ \beta_1 & \dots & & & \\ & \dots & & & \\ & & & \beta_{n-1} & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

- Rek-Formel finden  
 - Entwickeln nach Zeile  
 Zeile / Spalte  
 $p_0(\lambda) = 1$   
 $p_1(\lambda) = \lambda - \alpha_1$   
 $p_n(\lambda) = \alpha_n p_{n-1}(\lambda) - \beta_{n-1} p_{n-2}(\lambda)$   
 ableiten  $\Rightarrow$  einf. Nullst.

eine reelle symmetrische Tridiagonalmatrix mit  $\beta_i \neq 0, i = 1, \dots, n-1$ . Zeigen Sie, daß  $T$   $n$  verschiedene Eigenwerte hat.

**Aufgabe 3: (3 Punkte)**

Sei  $T$  eine symmetrische Tridiagonalmatrix mit  $\beta_i > 0$  und Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Sei  $ET\varphi(\lambda) = \lambda E\varphi(\lambda), \varphi_1(\lambda) = 1$ . Für zwei Polynome  $p, q$  sei das innere Produkt definiert durch

$$(p, q) = \sum_{k=1}^n \frac{p(\lambda_k)q(\lambda_k)}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2}$$

Zeigen Sie:  $\varphi_k(\lambda)$  ist ein Polynom vom Grade  $k-1$  in  $\lambda$ , und es gilt

$$E \begin{pmatrix} \alpha_n & & & \\ \beta_n & \dots & & \\ & \dots & & \\ & & \beta_{n-1} & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) \\ \vdots \\ \varphi_n(\lambda) \end{pmatrix} = E \lambda \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) \\ \vdots \\ \varphi_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$

$\Rightarrow$  versch.  $E \omega \lambda$   $\varphi(\lambda)$  konstr. wie oben

$$\sum_{j=1}^n \frac{\varphi_k(\lambda_j) \cdot \varphi_l(\lambda_j)}{\|\varphi(\lambda_j)\|^2} = \delta_{kl} \quad \text{Konstruktion}$$

$X^T X = I \Rightarrow$  Zeilen  $u_i$  Spalten  $v_i$  orth.





**Aufgabe 4: (4 Punkte)**

Sei  $T$  die Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta & \\ & & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^i \\ \vdots \\ v_m^i \end{pmatrix}$$

mit  $\beta > 0$ .

Berechnen Sie die Eigenwerte von  $T$ , und zeigen Sie, daß  $T$  durch seine beiden kleinsten Eigenwerte eindeutig bestimmt ist.

$$\beta v_{j-1}^i + \alpha v_j^i + \beta v_{j+1}^i$$



## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 2 , Abgabe: 18.05.1989 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 5: (3 Punkte)

Sei  $Lu = p_0u^{(n)} + p_1u^{(n-1)} + \dots + p_nu$ ,  $p_j \in C^{n-j}$  in  $[a, b]$  und reell. Sei

$$Lu = \lambda u \quad , \quad Ru = 0$$

ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem. Zeigen Sie: Dann ist  $n$  gerade, und  $L$  hat die Form

$$Lu = (q_0u^{(m)})^{(m)} + (q_1u^{(m-1)})^{(m-1)} + \dots + q_mu$$

mit  $2m = n$ .

### Aufgabe 6: (3 Punkte)

Sei  $Lu = -(q_0u')' + q_1u$  mit  $q_j \in C^{1-j}$  in  $[a, b]$ , und sei

$$Ru = \begin{pmatrix} \alpha u(a) + \beta u'(a) \\ \gamma u(b) + \delta u'(b) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Das Problem  $Lu = \lambda u$ ,  $Ru = 0$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $q_0, q_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  reell und

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad , \quad \gamma^2 + \delta^2 > 0$$

ist.

### Aufgabe 7: (4 Punkte)

Für  $q \in C^0$  und reell in  $[a, b]$ ,  $\alpha$  komplex, betrachtet man das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} i u' + qu &= \lambda u \\ u(a) - \alpha u(b) &= 0 \end{aligned}$$

- Man zeige, daß das Problem genau dann selbstadjungiert ist, wenn  $|\alpha| = 1$ .
- Man zeige, daß das Problem für  $|\alpha| = 1$  unendlich viele Eigenwerte besitzt.
- Sei  $\int_a^b q(x) dx = 0$ . Zeigen Sie, daß dann  $\alpha$  und  $b - a$  durch die Eigenwerte eindeutig bestimmt sind.



**Aufgabe 8:** (4 Punkte)

Die Differentialgleichung

$$-y'' + \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}y = \lambda y$$

hat die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda x}), \quad \sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda x})$$

mit den Bessel-Funktionen  $J_\nu, Y_\nu$  der 1. bzw. 2. Art.

- (a) Berechnen Sie die ersten 5 Eigenwerte der Differentialgleichung mit den Randbedingungen  $y(a) = y(b) = 0$  für  $a = 1, b = 4, \nu = 0$ . Benutzen Sie entweder einen Computer oder die Tabelle 9.7 in **Abramowitz-Stegun, *Handbook of Mathematical Functions***.
- (b) Lösen Sie das gleiche Problem näherungsweise unter Benutzung der asymptotischen Formeln aus Teil II, §2 der Vorlesung und vergleichen Sie die Resultate.



## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 2 , Abgabe: 18.05.1989 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 5: (3 Punkte)

Sei  $Lu = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_n u$ ,  $p_j \in C^{n-j}$  in  $[a, b]$  und reell. Sei

$$Lu = \lambda u \quad , \quad Ru = 0$$

ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem. Zeigen Sie: Dann ist  $n$  gerade, und  $L$  hat die Form

$$Lu = (q_0 u^{(m)})^{(m)} + (q_1 u^{(m-1)})^{(m-1)} + \dots + q_m u$$

mit  $2m = n$ .

### Aufgabe 6: (3 Punkte)

Sei  $Lu = -(q_0 u')' + q_1 u$  mit  $q_j \in C^{1-j}$  in  $[a, b]$ , und sei

$$Ru = \begin{pmatrix} \alpha u(a) + \beta u'(a) \\ \gamma u(b) + \delta u'(b) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Das Problem  $Lu = \lambda u$ ,  $Ru = 0$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $q_0, q_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  reell und

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad , \quad \gamma^2 + \delta^2 > 0$$

ist.

### Aufgabe 7: (4 Punkte)

Für  $q \in C^0$  und reell in  $[a, b]$ ,  $\alpha$  komplex, betrachtet man das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} i u' + q u &= \lambda u \\ u(a) - \alpha u(b) &= 0 \end{aligned}$$

- Man zeige, daß das Problem genau dann selbstadjungiert ist, wenn  $|\alpha| = 1$ .
- Man zeige, daß das Problem für  $|\alpha| = 1$  unendlich viele Eigenwerte besitzt. (Satz 6)
- Sei  $\int_a^b q(x) dx = 0$ . Zeigen Sie, daß dann  $\alpha$  und  $b-a$  durch die Eigenwerte eindeutig bestimmt sind.





**Aufgabe 8: (4 Punkte)**

Die Differentialgleichung

$$-y'' + \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}y = \lambda y$$

hat die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda x}), \quad \sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda x})$$

mit den Bessel-Funktionen  $J_\nu, Y_\nu$  der 1. bzw. 2. Art.

- (a) Berechnen Sie die ersten 5 Eigenwerte der Differentialgleichung mit den Randbedingungen  $y(a) = y(b) = 0$  für  $a = 1, b = 4, \nu = 0$ . Benutzen Sie entweder einen Computer oder die Tabelle 9.7 in **Abramowitz-Stegun, *Handbook of Mathematical Functions***.
- (b) Lösen Sie das gleiche Problem näherungsweise unter Benutzung der asymptotischen Formeln aus Teil II, §2 der Vorlesung und vergleichen Sie die Resultate.

$$\begin{aligned} \int_1^4 q(x) dx &= \int_1^4 \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2} dx = \\ &= \frac{4\nu^2 - 1}{4} \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{-4\nu^2 + 1}{4} \left[ \frac{1}{x} \right]_1^4 \\ &= \frac{-4\nu^2 + 1}{4} \left[ \frac{1}{4} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = -\frac{3}{16} \end{aligned}$$



Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 3 , Abgabe: 25.05.1989 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

**Aufgabe 9:** (6 Punkte)

Sei  $Tu = -u'' + qu$  und  $T_0u = -u'' + q_0u$ , und sei  $K$  Lösung der gemischten Aufgabe

$$\begin{aligned} K_{xx} - K_{yy} + (q_0(x) - q(y))K &= 0, & a < y < x < b \\ K_y - \alpha K &= 0, & a = y < x < b \\ K &= \alpha - \alpha_0 + \frac{1}{2} \int_0^x (q - q_0)(t) dt, & a < x = y < b. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für alle  $\varphi \in C^2[a, b]$  mit  $\varphi'(a) - \alpha\varphi(a) = 0$  gilt dann

$$T_0L\varphi = LT\varphi, \quad (L\varphi)'(a) - \alpha_0(L\varphi)(a) = 0.$$

*Transmutation für andere Parabelgleichung.*

**Aufgabe 10:** (4 Punkte)

Für  $f \in C[0, \infty)$  sei

*normiert  
stetig u. beschränkt*

$$(Lf)(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy.$$

$$(Lf)(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,y) f(y) dy$$

Zeigen Sie: *Max als Norm*

*Kein stetige Kern*

(a)  $L$  ist in  $C[0, \infty)$  ein linearer beschränkter Operator mit  $\|L\| = \pi/2$ .

(b) Zeigen Sie, daß  $L$  invertierbar ist, und zwar gilt für  $Lf = g$

*Integrale*

*wichtig 16*

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{xg(x)}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx.$$

Hinweis: Für  $0 < s < y$  gilt

$$\int_s^y \frac{x dx}{\sqrt{y^2 - x^2} \sqrt{x^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2}$$

(c) Zeigen Sie, daß  $L^{-1}$  in  $C[0, \infty)$  nicht beschränkt ist.

*c)  $\Leftarrow$  b)*

*13*



Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 4 , Abgabe: 01.06.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

**Aufgabe 11:** (4 Punkte)

Sei  $q \in C^1[a, b]$  und  $\varphi$  die Lösung von

$$-\varphi'' + q\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi(a, \lambda) = 0, \quad \varphi'(a, \lambda) = 1. \quad \text{amfueh}$$

Zeigen Sie: Für  $\lambda \rightarrow \infty$  gilt

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(x - a) + \frac{1}{2\lambda} \int_a^x q(y) dy \cos \sqrt{\lambda}(x - a) + \mathcal{O}(\lambda^{-3/2}).$$

**Aufgabe 12:** (4+4+4 Punkte)

Sei  $T_n$  die reelle symmetrische Tridiagonalmatrix

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} & \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \beta_i > 0$$

*In starke  
eindeutige  
Spektrale  
norme EWS*

und  $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$  ihre Eigenwerte.

(a) Zeigen Sie:  $\lambda_1^n \leq \lambda_1^{n-1} \leq \lambda_2^n \leq \lambda_2^{n-1} \leq \lambda_3^n \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^n \leq \lambda_{n-1}^{n-1} \leq \lambda_n^n$ .

Hinweis: Benutzen Sie die Maximum-Minimum-Darstellung

$$\lambda_k^n = \underset{\substack{V \\ \dim(V) = k-1}}{\text{Max}} \underset{\substack{x \perp V \\ x \neq 0}}{\text{Min}} \frac{(T_n x, x)}{(x, x)}$$

(b) Sei  $p_n$  das charakteristische Polynom von  $T_n$ , also

$$p_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^n).$$

Zeigen Sie: Mit  $p_{-1} = 0, p_0 = 1$  gilt

$$p_n = (\lambda - \alpha_n)p_{n-1} - \beta_{n-1}^2 p_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(c) Seien für ein  $n \geq 2$  die Eigenwerte von  $T_n$  und  $T_{n-1}$  gegeben.

Zeigen Sie, daß dadurch  $T_n$  eindeutig bestimmt ist.

*we nache b)*



## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 5 , Abgabe: 15.06.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 13: (4 Punkte)

Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^1) \cap L_1(\mathbb{R}^1)$ , und sei

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{f(y)}{x-y} dy$$

die Hilbert-Transformation von  $f$ . Hierbei ist

$$\oint f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} f(x) dx$$

der Cauchy'sche Hauptwert. Zeigen Sie: Für  $\xi \neq 0$  ist

$$(Hf)^\wedge(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\xi)}{x} dx = \pi \operatorname{sgn}(\xi), \quad \xi \neq 0.$$

### Aufgabe 14: (2 Punkte)

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $A$  eine invertierbare reelle  $(n, n)$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Sei

$$g(x) = f(Ax + b).$$

Zeigen Sie:

$$\hat{g}(\xi) = \frac{e^{ib \cdot A^{-T} \xi}}{\det(A)} \hat{f}(A^{-T} \xi)$$

### Aufgabe 15: (4 Punkte)

Sei  $\varphi$  die Funktion aus der Gelfand-Levitan-Methode für  $q = 0$ , und sei

$$\lambda_k = (k+1)^2 \left( \frac{\pi}{b-a} \right)^2.$$

Zeigen Sie: Im Sinne von  $L_2$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda_k) \varphi(y, \lambda_k)}{\int_a^b \varphi^2(x, \lambda_k) dx} = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (x-a)(b-y) & , x \leq y \\ (b-x)(y-a) & , x \geq y \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß beide Seiten mit der Green'schen Funktion des Randwertproblems

$$-u'' = f, \quad u(a) = u(b) = 0$$

übereinstimmen.





## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 6 , Abgabe: 22.06.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 16: (3 Punkte)

Sei  $R$  die Radon-Transformation und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Zeigen Sie: Für  $m = 0, 1, \dots$  ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^m Rf(\Theta, s) ds = p_m(\Theta)$$

mit einem Polynom  $p_m$  in  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$  vom Grade  $m$ .

### Aufgabe 17: (5 Punkte)

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $k(x) = |S^{n-2}||x|^{-1}$ . Zeigen Sie:

$$R^* Rf = k * f$$

### Aufgabe 18: (5 Punkte)

Sei für  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$(T_\mu f)(\Theta, s) = \int_{x \cdot \Theta = s} e^{\mu x \cdot \Theta^\perp} f(x) dx$$

mit  $\Theta = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ ,  $\Theta^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ , und sei

$$(T_\mu^* g)(x) = \int_{S^1} e^{\mu x \cdot \Theta^\perp} g(\Theta, x \cdot \Theta) d\Theta .$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} T_\mu(f * g) &= T_\mu f * T_\mu g \\ T_{-\mu}^* T_\mu f &= k * f, \quad k(x) = 2 \frac{\cosh(\mu|x|)}{|x|} \end{aligned}$$



## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 6 , Abgabe: 22.06.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 16: (3 Punkte)

Sei  $R$  die Radon-Transformation und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Zeigen Sie: Für  $m = 0, 1, \dots$  ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^m Rf(\Theta, s) ds = p_m(\Theta)$$

mit einem Polynom  $p_m$  in  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$  vom Grade  $m$ .

### Aufgabe 17: (5 Punkte)

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $k(x) = |S^{n-2}| |x|^{-1}$ . Zeigen Sie:

$$R^* Rf = k * f$$

### Aufgabe 18: (5 Punkte)

Sei für  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$(T_\mu f)(\Theta, s) = \int_{x \cdot \Theta = s} e^{\mu x \cdot \Theta^\perp} f(x) dx \stackrel{!}{=} \int_{\Theta^\perp} e^{\mu(s\Theta + y) \cdot \Theta^\perp} f(s\Theta + y) dy$$

mit  $\Theta = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ ,  $\Theta^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ , und sei

$$(T_\mu^* g)(x) = \int_{S^1} e^{\mu x \cdot \Theta^\perp} g(\Theta, x \cdot \Theta) d\Theta.$$

Zeigen Sie:

$$T_\mu(f * g) = T_\mu f * T_\mu g$$

$$T_{-\mu}^* T_\mu f = k * f, \quad k(x) = 2 \frac{\cosh(\mu|x|)}{|x|}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 7 , Abgabe: 29.06.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 19: (2 Punkte)

Berechnen Sie für  $g \in C^1$

$$J^0 g = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} J^\alpha g$$

und zeigen Sie, daß Satz 4.1 auch für  $\alpha = 1$  gilt.

### Aufgabe 20: (2 Punkte)

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  mit  $\alpha_i \geq 0$  und ganz,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Zeigen Sie:

$$(RD^\alpha f)(\theta, s) = \theta^\alpha D^{|\alpha|}(Rf)(\theta, s), \quad \theta \in S^{n-1}, \quad s \in \mathbb{R},$$

wobei  $D^{|\alpha|}$  auf der zweiten Variablen von  $Rf$  operiert.

### Aufgabe 21: (6 Punkte)

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  und

$$f(r\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(r) e^{ik\varphi}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Dann ist

$$(Rf)(\theta, s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k(s) e^{ik\varphi},$$

$$g_k(s) = 2 \int_s^\infty T_{|k|}\left(\frac{s}{r}\right) \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right)^{-1/2} f_k(r) dr$$

mit dem Tschebyscheff-Polynom  $T_k$  1. Art der Ordnung  $k$ .



## Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 8 , Abgabe: 06.07.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

---

### Aufgabe 22: (6+6 Punkte)

Sei  $q \in C^1(\mathbb{R}^3)$  und der Träger von  $q$  sei in  $|x| < 1$  enthalten. Für  $|z| > 1$  sei

$$u_z = \frac{e^{ik|x-z|}}{4\pi|x-z|} + v_z$$

Lösung von

$$\Delta u_z + k^2(1-q)u_z = -\delta_z \quad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

und  $v_z$  erfülle die Ausstrahlungsbedingung.

(a) Zeigen Sie: Für die Lösung gilt für  $|x| \rightarrow \infty$

$$v_z(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} A\left(\frac{z}{|z|}, \frac{x}{|x|}, k\right) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right),$$

$$A(\theta, \omega, k) = k^2 \int_{|y|<1} e^{-iky \cdot \omega} \left( \frac{e^{ik|y-\theta|}}{4\pi|y-\theta|} + v_z(y) \right) q(y) dy$$

(b) Lösen Sie das inverse Problem: Gegeben  $v_z(x)$  für alle  $z$  mit  $|z| > 1$ , alle  $x$  mit  $|x| > 1$  und ein  $k \geq 0$ , gesucht  $q$ , in der Born'schen Näherung.





Übungen zur Vorlesung INVERSE PROBLEME

Übungsblatt 9 , Abgabe: 13.07.1992 , 15.00 Uhr, in Kasten 1

*Methode von  
? Calderon ?*

**Aufgabe 23:** (6+6 Punkte)

Sei  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ , und sei  $q \in C_0^1(\Omega)$  Lösung des inversen Problems

$$\operatorname{div}((1+q)\nabla u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = j \text{ auf } \partial\Omega.$$

Für jedes  $j \in C^\infty(\partial\Omega)$  ist  $\Lambda_q j = u|_{\partial\Omega}$  bekannt.

(a) Zeigen Sie: Für alle  $j$  und alle harmonischen  $v$  gilt

$$\int_{\Omega} q \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \left( v j - \frac{\partial v}{\partial \nu} \Lambda_q j \right) d\sigma$$

(b) Setzen Sie für  $\xi \in \mathbb{R}^n$   $z = \frac{1}{2}(\xi + i\xi^\perp)$  mit  $\xi^\perp \perp \xi$  und  $|\xi^\perp| = |\xi|$ ,

$$\begin{aligned} j_\xi(x) &= -iz \cdot \nu(x) e^{-iz \cdot x}, & x \in \partial\Omega \\ v_\xi(x) &= e^{-i\bar{z} \cdot x}, & u_\xi(x) = e^{-iz \cdot x} + w_\xi(x) \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

und zeigen Sie, daß

$$\hat{q}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \frac{2}{|\xi|^2} \left\{ \int_{\partial\Omega} \left( v_\xi j_\xi - \frac{\partial v_\xi}{\partial \nu} \Lambda_q j_\xi \right) d\sigma \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} q \nabla w_\xi \nabla v_\xi dx \right\}$$

*↑  
vernachlässigbar?  
Nach Calderon - von  
einigen j. Schätzungen.*

*Spezialfall  
von a)*

